Available at www.ElsevierMathematics.com
POWERED BY SCIENCE DIRECT
Journal of Algebra 268 (2003) 81–117
JOURNAL OF Algebra
www.elsevier.com/locate/jalgebra

# Points de réductibilité pour les induites de cuspidales

Colette Moeglin

*CNRS, Institut mathématiques de Jussieu, France*

Reçu le 25 octobre 2001

Présenté par Robert Kottwitz

Soit $F$ un corps $p$-adique ; on suppose $p \neq 2$. Et soit $G(n,F)$ un $F$-groupe classique de rang $n$ (déployé ou non), classique veut dire $Sp(2n,F)$, $O(m,F)$ avec $m = 2n$ ou $2n+1$ ou un groupe unitaire, on note alors $E$ le corps extension de $F$ qui sert à la définition ; pour unifier les notations, dans les cas symplectique ou orthogonal, on pose $E = F$. On décrit aussi ces groupes comme automorphismes d'un espace vectoriel, $V$, muni d'une forme bilinéaire, symplectique, orthogonale ou hermitienne. Soit $d \in \mathbb{N}$ ; on définit $G(n+d,F)$ comme le groupe de même type que $G(n,F)$ mais agissant sur l'espace obtenu en ajoutant à $V$, $d$-plans isotropes. Soient encore $\pi$ une représentation cuspidale irréductible de $G(n,F)$ et $\rho$ une représentation cuspidale irréductible de $GL(d,E)$. On considère pour le groupe $G(n+d,F)$ la représentation induite de $\rho \otimes \pi$. Le premier but de cet article est de montrer que si cette représentation induite est réductible alors le caractère central de $\rho$ est le produit d'un caractère, $\chi$, d'ordre fini par un caractère $|\,|_E^{m/2}$ où $m \in \mathbb{Z}$ ; le caractère $\chi$ est quadratique dans le cas des groupes orthogonaux ou symplectiques.

Dans la suite de l'article, on se limite au cas des groupes symplectiques et orthogonaux (parce que ce sont les hypothèses de [12]). On note $Red(\pi)$ l'ensemble des représentations cuspidales autoduales, $\rho$, d'un groupe linéaire $GL(d_\rho,F)$ (cela définit $d_\rho$) pour lesquelles il existe $x_\rho \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ avec $x_\rho \neq 0, 1/2$ tel que l'induite $\rho|\,|^{x_\rho} \times \pi$ soit réductible. Le nombre $x_\rho$ est uniquement déterminé par $\rho$ (résultat de Silberger [22]). On note $m^*$ l'entier tel que le $L$-groupe de $G(n)$ soit un groupe d'automorphismes sur un espace vectoriel de dimension $m^*$ (si $G(n)$ est symplectique $m^* = 2n+1$, si $G(n)$ est orthogonal $m^* = 2n$). On montre l'inégalité

$$\sum_{\rho \in Red(\pi)} \sum_{\ell \in [1,[x_\rho]]} d_\rho(2x_\rho - 2\ell + 1) \leqslant m^*;$$

les crochets représentent les parties entières. Conjecturalement, on doit avoir :

*Adresse e-mail :* moeglin@math.jussieu.fr.


doi:10.1016/S0021-8693(03)00172-8

$$\sum_{\rho\in Red(\pi)}\sum_{\ell\in[1,[x_\rho]]} d_\rho(2x_\rho-2\ell+1)=m^*$$

à cause du lien qu'il y doit y avoir entre blocs de Jordan (c'est à dire paramètre de Langlands) et points de réductibilité. On rappelle qu'en [15], on a défini les blocs de Jordan d'une série discrète $\pi$ comme l'ensemble des couples $(\rho, a)$ pour $\rho$ représentation cuspidale autoduale d'un $GL(d_\rho, F)$ (cela définit $d_\rho$) et $a \in \mathbb{N}$ avec une condition de parité dépendant de $\rho$ et de $G$ (cf. 4 pour la définition précise qui évite toute conjecture) et tel que l'induite $St(\rho, a) \times \pi$ soit irréductible, où $St(\rho, a)$ est la représentation de Steinberg de $GL(ad_\rho, F)$ basée sur $\rho$. Par des méthodes élémentaires, on vérifie que, si $\pi$ est cuspidale,

$$Jord(\pi)=\left\{(\rho,2x_\rho-2\ell+1);\ \rho\in Red(\pi),\ x_\rho\in\tfrac{1}{2}\mathbb{N},\ x_\rho>\tfrac{1}{2},\ \ell\in\left[1,[x_\rho]\right]\right\}.$$

Et on en déduit l'inégalité, pour $\pi$ cuspidale :

$$\sum_{(\rho,a)\in Jord(\pi)} ad_\rho \leqslant m^*.$$

On étend ensuite facilement cette inégalité à toute série discrète. On sait ce qu'est le support cuspidal d'une représentation et en laissant tomber les facteurs $GL$, on a la notion de support cuspidal partiel (cf. 4.1 pour un énoncé précis). Si $\pi$ est la représentation, on note $\pi_{\text{cusp}}$ son support cuspidal partiel, c'est une représentation d'un groupe $G(n_{\text{cusp}})$ de même type que $G$ (ce qui définit $n_{\text{cusp}}$). Il est aussi élémentaire de vérifier que, pour $\pi$ une série discrète

$$\sum_{(\rho,a)\in Jord(\pi)} ad_\rho \geqslant m^* \quad\Rightarrow\quad \sum_{(\rho,a)\in Jord(\pi_{\text{cusp}})} ad_\rho \geqslant (m_{\text{cusp}})^*,$$

où $(m_{\text{cusp}})^*$ est l'analogue de $m^*$ pour $n_{\text{cusp}}$ remplaçant $n$. Et si une telle inégalité est satisfaite alors on a l'égalité et pour tout $\rho \in Red(\pi_{\text{cusp}})$ avec $x_\rho > \frac{1}{2}$ alors $x_\rho \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$. L'idée qui nous guide est évidemment qu'en [15] et [17], on a classifié les séries discrètes telles que leur support cuspidal partiel a la propriété que pour tout $\rho \in Red(\pi_{\text{cusp}})$ $x_\rho \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$.

Il y a un cas simple où l'on sait vraiment tout, objet de la Section 5. C'est le cas des séries discrètes $\pi$ vérifiant :

$$\sum_{(\rho,a)\in Jord(\pi_{\text{cusp}})\,|\,d_\rho=1} a \geqslant (m_{\text{cusp}})^*. \tag{$P_{\text{quad}}$}$$

Dans ce cas on montre que $Red(\pi_{\text{cusp}})$ est uniquement formé de caractères quadratiques et que $\pi$ est l'image par l'involution type Iwahori–Matsumoto [2,19] d'une représentation quadratique unipotente au sens de [14]. Les représentations quadratiques unipotentes avaient été caractérisées en [14] par des propriétés de leur front d'onde mais ici on obtient la caractérisation plus simple : ce sont, via l'involution, l'ensemble des séries discrètes, $\pi$ vérifiant :

$$\sum_{(\rho,a)\in Jord(\pi)\,|\,d_\rho=1} a \geqslant m^*;$$

elles sont aussi caractérisées par la propriété $(P_{\text{quad}})$ ci-dessus pour leur support cuspidal partiel ce qui est moins esthétique mais plus commode (car plus fort). A une série discrète quadratique unipotente, on sait alors associer un paramètre type Langlands, c'est-à-dire un homomorphisme de $W_F \times SL(2,\mathbb{C})$ dans le $L$-groupe de $G(n)$ et un caractère du centralisateur de ce morphisme : on prend les constructions de [14] via l'involution comme ci-dessus. Ces constructions ont été faites avec le front d'onde et ne sont pas canoniques. On montre qu'en les modifiant légèrement ces paramètres satisfont à toutes les conditions de [15] ; il y a essentiellement 2 points à vérifier. D'abord que la décomposition en sous-représentations irréductibles de la représentation $\psi$ de $W_F \times SL(2,\mathbb{C})$ est bien donnée par $Jord(\pi)$ (il y a la correspondance de Langlands locale de [4] et [5] qui intervient pour les identifications). Ensuite il faut montrer que le caractère du centralisateur est fortement lié aux modules de Jacquet de la représentation (cf. 4.1). La modification n'intervient que pour les groupes orthogonaux et c'est juste une torsion par un caractère.

Dans certains cas Lusztig a fait correspondre à un tel paramètre une représentation de $G(n)$, de réduction unipotente (cf. [10,11,23]). Les hypothèses de Lusztig sont que $G(n)$ est à centre connexe, en imposant en plus orthogonal ou symplectique, il ne reste que $G(n) = SO(2n+1)$ et $Quad(\pi)$ est formé de caractères non ramifiés de $F^*$ (donc $Quad(\pi)$ a au plus 2 éléments avec l'hypothèse $p \neq 2$). On montre que la construction de Lusztig coïncide avec la nôtre. Ici on utilise le fait que $(P_{\text{quad}})$ est satisfaite pour savoir que les seuls points de réductibilité autre que 0 et $1/2$ (pour $\pi_{\text{cusp}}$ une cuspidale de réduction unipotente) sont obtenus avec des caractères quadratiques non ramifiés. Pour identifier les 2 constructions, on a besoin de savoir que la construction de Lusztig satisfait aussi les hypothèses de [15] ; pour la partie la plus difficile, c'est fait en appendice à ce travail par J.-L. Waldspurger.

L'article repose d'abord sur les propriétés des fronts d'onde des représentations développées en [18] et [12], puis sur la correspondance de Howe. Pour pouvoir traiter le cas des groupes orthogonaux impairs avec les méthodes de [13,14], il faut aussi avoir le cas des groupes métaplectiques. Dans ce cas, on prend $Sp(2n,\mathbb{C})$ comme groupe dual (c'est ce qui est expliqué en [14] et est suggéré par les travaux d'Adams [1]) et $G(n)$ dans tout l'article peut donc aussi être le groupe métaplectique.

Je remercie F. Shahidi et J.-F. Dat pour les conversations que nous avons eues sur cet article. C'est grâce aux motivations fournis par J.-F. Dat (cf. [3]) que cet article a été écrit. Je remercie aussi J.-L. Waldspurger pour son appendice.

## 1. Rappel sur la notion de front d'onde

### *1.1. Définition*

On renvoie à [7,12,18] pour plus de détail mais on essaie quand même de rappeler ici tout ce dont on aura besoin. Soit $U$ une orbite nilpotente de $\operatorname{Lie} G(n,F)$. Soit $u \in U$ et soit $\phi$ un $SL(2)$-triplet relativement à $u$. Un tel choix est unique à conjugaison près par un sous-groupe du commutant de $u$. Avec un tel choix, on associe à $\phi$ un sous-groupe parabolique, $P_u$ dont on note $N_u$ le radical unipotent. On associe encore à $u$ (après choix de $\phi$) un quotient de $N_u$ qui est un groupe de Heisenberg, $H_u$ et un caractère du centre de ce groupe, $\lambda_u$. On note alors $S_u$ la représentation irréductible de ce groupe d'Heisenberg de caractère central $\lambda_u$. Il reste encore à introduire la notation $N'_u$ pour l'image réciproque du centre de $H_u$ dans $N_u$.

Soit $\pi, V$ une représentation lisse de $G(n, F)$ (ce n'est pas le $\pi$ de l'introduction) et soit $U, u, \phi$ comme ci-dessus. On pose :

$$V_u := \mathrm{Hom}_{N_u}\big(S_u, V/\big(N'_u\big)_{\lambda_u} V\big).$$

Le $SL(2)$-triplet $\phi$ n'apparaît pas dans la notation, car à conjugaison près $V_u$ n'en dépend pas.

On appelle $FO(\pi)$ l'ensemble des couples $(U, \tau)$ formés d'une orbite nilpotente $U$ et d'une représentation irréductible du groupe $Cent_{G(n,F)}(\phi)$ vérifiant : pour $u \in U$, $V_u \neq 0$ alors que pour tout $U'$ orbite nilpotente contenant $U$ dans sa fermeture, $V_{u'} = 0$ pour $u' \in U'$ et $\tau$ intervient dans la représentation $V_u$. Ici nous allons utiliser la 2e partie de [12]. Dans ce texte, (on n'avait considéré que le cas orthogonal ou symplectique) et nous avions étudié le cas des représentations $\pi, V$ contenant dans leur front d'onde une orbite $U$ coupant un Levi de $G(n, F)$. On avait supposé ce Levi maximal, c'est-à-dire de la forme $GL(b, F) \times G(n - b, F)$ et on avait noté $P$ un parabolique ayant ce Levi ; l'hypothèse est précisée en demandant que la fermeture de $U$ contient des éléments nilpotents réguliers de $GL(b, F)$. On fixe $u \in U \cap \mathrm{Lie}\, M$ et on note $V_P$ le module de Jacquet de $V$ relativement au parabolique fixé. Alors $V_P$ est une représentation lisse de $M$ et on peut définir $(V_P)_u$ comme ci-dessus, mais en considérant $u$ comme un élément d'une orbite nilpotente de $\mathrm{Lie}\, M$. On avait construit en [12] un isomorphisme (cf. 2.8 de loc. cit.)

$$V_u \simeq (V_P)_u$$

entrelaçant l'action du centralisateur dans $M$ du $SL(2)$-triplet qui sert à la construction à la torsion près par un caractère, $\chi_{U,M}$. Ce qui nous intéresse est que le centre de $GL(b, F)$, noté ici $Z_b$ est précisément dans ce centralisateur. Dans les bons cas, (ceci est expliqué dans l'introduction de [12], 2.8) $Z_b$ agit sur $V_u$ par une somme de caractères quadratiques ; cela se produit par exemple si le nombre de blocs de Jordan de $U$ de taille $b$ est au moins 5. Dans ce cas, on sait alors qu'il existe un caractère quadratique $\eta$, tel que $\eta\chi_{U,M}$ apparaisse dans l'action de $Z_b$ sur $V_P$ (on identifie $Z_b$ et $F^*$). C'est cela que nous allons utiliser pour des représentations $\pi, V$ pour lesquelles on a une connaissance a priori des modules de Jacquet. L'apparition du caractère $\eta\chi_{U,M}$ est alors une vraie condition.

On veut ici aussi le cas des groupes unitaires ; les constructions générales de [12] s'appliquent sans changement en particulier la construction de l'isomorphisme entre $V_u$ et $(V_P)_u$ ; par contre, le calcul de $\chi_{U,M}$ n'a été fait que dans le cas orthogonal et symplectique. Ici, on n'a pas besoin d'un calcul explicite, le seul point est que $\chi_{U,M}$ est décrit dans [12], 2.2 à 2.4 (qui sont complètement généraux). Ce caractère intervient dans des changements de modèle pour la représentation métaplectique (multiplié par une fonction module pour le parabolique qui vient des définitions du module de Jacquet). Comme dans [12], 2.5, on en déduit que $\chi_{U,M}$ est le produit d'un caractère quadratique par un caractère $|\,|_E^{m/2}$ avec $m \in \mathbb{Z}$. L'autre différence dans le cas des groupes unitaires est que $A(\phi)$ (notation ci-dessus) est un produit de groupes unitaires (et non pas de groupes orthogonaux ou symplectiques). L'hypothèse sur la multiplicité au moins 5 du bloc de Jordan, assure que $Z_b$ s'identifie à un sous-groupe d'un groupe unitaire (noté ici $U_b$) sur une forme de dimension au moins 5 et donc non anisotrope. Comme $V_u$ est de dimension finie, l'action de $U_b$ est une somme de caractères du déterminant ; ainsi $Z_b$ y opère par une somme de caractère de la forme $z \in E^* \mapsto \eta(z) = \eta'(z/\bar{z})^d$, où $\eta'$ est un caractère des éléments de norme 1 de $E^*$. Comme ci-dessus, $\eta\chi_{U,M}$ intervient dans le module de Jacquet de $(\pi, V)$.

On généralise immédiatement la définition de $FO(\pi)$ à tout groupe réductif (c'est dans ce cadre que se placent [7] et [18]).

Les représentations qui nous intéressent sont les sous-quotients des induites $\rho|\,|^s \times \pi$ avec les notations du début de l'introduction et $s \in \mathbb{R}$ ; pour des calculs de module de Jacquet, il est commode de supposer $\rho$ unitaire (ce que nous ferons). Si $s$ est un point de réductibilité, l'induite est de longueur 2 exactement et chaque sous-quotient a des modules de Jacquet très particulier. Ils sont tous nuls sauf pour le parabolique de Levi $GL(d,E) \times G(n,F)$ où ils sont irréductibles en tant que représentation de ce Levi, isomorphe à : $\rho|\,|^s \otimes \pi$ et $\rho^*|\,|^{-s} \otimes \pi$.

Si l'une de ces représentations avait son front d'onde qui satisfaisait les hypothèses de [12], on aurait des renseignements assez précis sur la restriction de $\rho|\,|^s$ au centre de $GL(d,E)$. Le problème est qu'il n'est pas vrai en général que l'une des ces représentations a cette propriété et les préparatifs techniques ci-dessous ont pour objet de montrer que l'on peut obtenir les propriétés cherchées en remplaçant $\rho$ par un module de Speh convenable.

### *1.2. Préparatifs techniques*

On fixe $\pi$ et $\rho$ comme dans l'introduction, avec $\rho$ unitaire et on fixe $x_\rho \in \mathbb{R}_{>0}$. On suppose que l'induite $\rho|\,|^{x_\rho} \times \pi$ est réductible.

Pour $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $-x + y + 1 \in \mathbb{N}$, on note $Sp(\rho, x, y)$ la représentation de $GL(d(t+1), F)$ unique sous-module de l'induite :

$$\rho|\,|^x \times \cdots \times \rho|\,|^{x-i+1} \times \cdots \times \rho|\,|^y.$$

Sous l'hypothèse de réductibilité faite, pour tout $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, la représentation induite de $G(n + (t+1)d, F)$

$$|\,|^{-x_\rho} Sp(\rho, -t, 0) \times \pi$$

a un unique sous-module que l'on note $\pi(x_\rho, t)$ ; cette unicité résulte de la réciprocité de Frobenius et d'un calcul de module de Jacquet immédiat. Les modules de Jacquet de $\pi(x_\rho, t)$ sont particulièrement simples : ils sont nuls pour tout parabolique dont le Levi n'est pas de la forme $GL(xd, F) \times G(n + d(t+1) - xd, F)$ avec $x \in \mathbb{N}$ et pour un tel parabolique, le module de Jacquet est irréductible isomorphe à :

$$Sp(\rho, -x_\rho - t, -x_\rho - t + x - 1) \times \pi(x_\rho, t - x). \tag{1}$$

Ceci se démontre par récurrence sur $t$ : si $t = 0$, c'est l'hypothèse de réductibilité. Si $t > 0$, on utilise le fait que $\pi(x_\rho, t) \hookrightarrow \rho|\,|^{-t-x_\rho} \times \pi(x_\rho, t-1)$. Et on calcule l'intersection des modules de Jacquet des 2 induites contenant $\pi(x_\rho, t)$ avec les formules de Bernstein–Zelevinsky.

**Lemme.** *Soit $t > 5(2n+1+2d)$ et soit $U \in FO(\pi(x_\rho, t))$. Alors, il existe un entier $b > 0$ tel que $U$ a au moins 5 blocs de Jordan de taille $b$.*

Le front d'onde de $Sp(\rho, -t, 0)$ ne contient que l'orbite de l'algèbre de Lie de $GL(d(t+1), F)$ dont tous les blocs de Jordan sont précisément égaux à $d$ (cf. [18], 2e partie). On note $O(t+1, d)$ cette orbite. Les orbites de $FO(\pi(x_\rho, t))$ sont dans la fermeture des induites des orbites $O(t+1, d) \times O'$, où $O'$ parcourt l'ensemble des orbites incluses dans le front d'onde de $\pi$ (cf. aussi [18]). Si on considère ces orbites induites, elles ont au moins $(t+1)$-blocs de Jordan ; cela vient de la formule explicite pour l'induction : pour $O'$ comme ci-dessus, les blocs de Jordan de l'induite de $O(t+1, d) \times O'$ dans $GL(2d(t+1)+n^*, F)$ (où $n^*$ est la dimension de l'espace de la forme définissant $G(n, F)$) s'obtiennent en ajoutant $2d$ au $(t+1)$ plus grands blocs de Jordan de $O'$ (un bloc de Jordan peut être nul dans cette construction) ; et l'induite cherchée dans $G(n+d(t+1), F)$ est dans la fermeture de cette orbite de $GL(2d(t+1)+n^*, F)$. Quand on passe à la fermeture le nombre de blocs de Jordan de taille non nul ne peut que croître, d'où l'assertion. Soit $U \in FO(\pi(x_\rho, t))$ ; d'après ce qui précède, cette orbite a au moins $(t+1)$ blocs de Jordan. De plus le plus grand de ces blocs de Jordan est certainement inférieur ou égal à $2n+1+2d$. Cela vient encore des formules de l'induction comme expliqué ci-dessus et on a pris $2n+1$ pour majorer $n^*$ avec la notation précédente. Si l'on ne peut trouver 5 blocs de Jordan de même taille, on aurait sûrement :

$$(t+1)/5 \leqslant 2n+1+2d.$$

Si $t$ vérifie l'inégalité du lemme, on a une contradiction.

**Lemme.** *Sous les hypothèses du lemme précédent, toute orbite de $FO(\pi(x_\rho, t))$ coupe un Levi de $G(n+d(t+1), F)$ de la forme $GL(d) \times G(n+dt, F)$.*

Dans le lemme précédent, on a démontré que toute orbite dans $FO(\pi(x_\rho, t))$ coupe un Levi de la forme $GL(b, F) \times G(n+d(t+1)-b, F)$ où $b$ est la taille d'un bloc de Jordan intervenant au moins 5 fois : c'est une propriété de la classification des orbites sur $F$ incluse dans une orbite sur $\overline{F}$ qui elle est uniquement déterminée par ses blocs de Jordan. Avec ce que l'on a rappelé de [12] et avec le calcul des modules de Jacquet de $\pi(x_\rho, t)$ fait ci-dessus, cela force $b = xd$ et $Sp(\rho, -t, -t+x-1)$ doit avoir un modèle de Whittaker ; cela force $b = d$. Remarquons pour la démonstration suivante que le module de Jacquet est alors :

$$\rho|\,|^{-t-x_\rho} \otimes \pi(x_\rho, t-1). \tag{2}$$

## 2. Condition nécessaire pour la réductibilité

Soit $\pi$ une représentation cuspidale irréductible de $G(n,F)$. On reprend les notations $\rho, d$ pour une représentation cuspidale unitaire de $GL(d,E)$ et soit $x_\rho \in \mathbb{R}$ tels que $\rho|\,|^{x_\rho} \times \pi$ soit réductible. On note $Z$ le centre de $GL(d,E)$ que l'on identifie à $E^*$ (on n'a pas besoin de préciser l'identification).

**Théorème.** *Avec les notations $\rho, \pi, x_\rho, Z$ précédentes, le caractère de $E^*$, $(\rho \otimes |\,|^{x_\rho})_{|Z}$ est le produit d'un caractère d'ordre fini $\chi$ de $E^*$ par un caractère $|\,|^{m/2}$ avec $m \in \mathbb{Z}$. Si $G$ est symplectique ou orthogonal* (*ou même métaplectique*), *$\chi$ est quadratique.*

Remarquons que dans le cas des groupes unitaires, la preuve montrera que $\chi$ est le produit d'un caractère quadratique de $E^*$ par un caractère de la forme $z \in E^* \mapsto \eta'(z/\bar{z})$ où $\eta'$ est un caractère des éléments de norme 1 de $E^*$. On ne peut éviter ce caractère puisque l'on peut toujours tordre la situation par un caractère du déterminant du gros groupe unitaire. On commence par traiter le cas des groupes symplectiques et orthogonaux. On fixe $t$ satisfaisant au hypothèse du lemme de 1.2 et une orbite $U$ dans $FO(\pi(x_\rho,t))$ et plus précisément, on fixe $(U,\tau) \in FO(\pi(x_\rho,t))$. On fixe aussi une identification de $F^*$ avec le centre $Z$ de $GL(d,F)$ comme expliqué en [12], c'est-à-dire que le parabolique $P$ de Levi $GL(d,F) \times G(n,F)$ étant fixé, le centre de $GL(d,F)$ opère par des caractères positifs sur le radical unipotent de $P$. La représentation $\tau$ qui est une représentation d'une partie réductive du centralisateur de $u \in U$ se restreint en une représentation de $Z$ ; on explique dans l'introduction de [12], 2.8, que cette restriction est un caractère quadratique ; ce n'est pas mystérieux, $\tau$ est une représentation irréductible de dimension finie d'un produit de groupes orthogonaux et symplectique. Les représentations de tels groupes sont des caractères quadratiques sauf sur les composantes de type $O(2,F)$. Mais l'hypothèse faite que le bloc de Jordan de taille $b$ intervient au moins 5 fois assure que $Z$ est inclus soit dans un groupe symplectique soit dans un groupe $O(m,F)$ avec $m \geqslant 5$. D'après ce que l'on a expliqué en 1, on sait que

$$|\,|^{-dt-dx_\rho}\rho_{|Z} = \tau_{|Z}\chi_{U,M}.$$

L'apparition du $d$ dans $-(dt+dx_\rho)$ vient de l'identification de $F^*$ avec $Z$. Ou encore :

$$|\,|^{-dx_\rho}\rho_{|Z} = \tau_{|Z}\chi_{U,M}|\,|^{dt}. \tag{3}$$

On a calculé explicitement $\chi_{U,M}$ dans [12], 2.5. Ce caractère est de la forme un caractère quadratique multiplié par le caractère $|\,|^{-x_{U,M}}$, où $x_{U,M}$ se calcule en fonction des blocs de Jordan de $U$. La formule exacte est, en notant $Jord(U)$ l'ensemble des blocs de Jordan de $U$ :

$$x_{U,M} = \frac{1}{2}\sum_{i\in[1,d]} \left|\left\{p \in Jord(U);\ p \geqslant i\right\}\right| - \left[(d+\delta)/2\right],$$

où $\delta = 0$ ou 1 ne dépend que de $G$. C'est plus qu'il n'en faut !

Le cas des groupes unitaires est analogue d'après ce que l'on a expliqué à la fin de 1, à ceci près que l'on n'a pas de calcul explicite ni la propriété que $\tau$ est une somme de caractères quadratique. On ne sait sur $\tau$ que ce qui est précisé à la suite de l'énoncé.

## 3. Propriétés de finitude

A partir de maintenant $G(n)$ est soit $Sp(2n, F)$ soit l'une des formes des groupes $SO(2n+1, F)$, $O(2n, F)$, soit aussi le groupe métaplectique $Mp(2n, F)$ (avec comme groupe dual $Sp(2n, \mathbb{C})$) sauf mention explicite du contraire. Soit $\pi$ une représentation cuspidale de $G(n)$ et soit $\mathcal{E}$ une collection de représentations cuspidales unitaires $\{\rho \in \mathcal{E}\}$ de groupes linéaires. Pour $\rho \in \mathcal{E}$ on note $d_\rho \in \mathbb{N}$ l'entier tel que $\rho$ soit une représentation de $GL(d_\rho, F)$ et on suppose qu'il existe $x_\rho \in \mathbb{R}_{>0}$ tel que l'induite $\rho|\,|^{x_\rho} \times \pi$ est réductible. D'après le résultat de Silberger [22], $x_\rho$ est uniquement déterminé (c'est aussi vrai si l'on demande uniquement $x_\rho \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$). Comme précédemment on note $m^*$ la dimension de l'espace vectoriel complexe sur lequel le groupe dual de $G(n)$ opère naturellement. On rappelle que $m^* = 2n+1$ si $G(n) = Sp(2n, F)$ et $m^* = 2n$ dans tous les autres cas.

**Théorème.** *Avec les hypothèses et notations précédentes* $\sum_{\rho \in \mathcal{E}} d_\rho(2x_\rho - 1) \leqslant m^*$ *on a même l'inégalité plus forte* :

$$\sum_{\rho \in \mathcal{E}} \sum_{\ell \in [1, [x_\rho]]} d_\rho(2x_\rho - 2\ell + 1) \leqslant m^*.$$

On démontre d'abord la première inégalité. Pour $t \in \mathbb{N}$, on note $\pi(\mathcal{E}, t)$ l'unique sous-module irréductible de la représentation induite :

$$\bigtimes_{\rho \in \mathcal{E}} \Big( \bigtimes_{j \in [0,t]} \rho|\,|^{-t+j} \Big) \times \pi.$$

L'unicité du sous-module vient du fait que dans le semi-simplifié des modules de Jacquet de l'induite totale, la représentation $\bigotimes_{\rho \in \mathcal{E}} (\bigotimes_{j \in [0,t]} \rho|\,|^{-t+j}) \otimes \pi$ n'a que multiplicité 1 grâce à l'hypothèse que $x_\rho \neq 0$.

On pose $d_{\mathcal{E}} := \sum_{\rho \in \mathcal{E}} d_\rho$. Soit $U_t$ une orbite unipotente du front d'onde de $\pi(\mathcal{E}, t)$ ; on note $Jord(U_t)$ l'ensemble des blocs de Jordan des éléments de $U_t$ ensemble que l'on considère avec multiplicité. Montrons que

$$\forall \alpha \in Jord(U_t) \quad \alpha \leqslant m + 2d_{\mathcal{E}}.$$

L'argument est que le front d'onde d'un sous-quotient d'une représentation induite est dans la fermeture de l'induite du front d'onde de la représentation que l'on induit (cf. [18]). On a écrit les formules pour l'induction en 1.2 et ici on utilise une majoration grossière.

On va faire varier $t$ et pour tout $t$ on fixe $U_t$ comme ci-dessus. On range les éléments de $Jord(U_t)$ dans l'ordre décroissant $\alpha_1(t) \geqslant \alpha_2(t) \geqslant \cdots$. Comme les $\alpha_j(t)$ sont bornés indépendamment de $t$, la multiplicité avec laquelle ils apparaissent dans $Jord(U_t)$, pour au moins l'un d'entre eux, ne peut être bornée indépendamment de $t$. On peut donc trouver

$j \in \mathbb{N}$ des entiers $\alpha_i$ pour $i \in [1, j]$ un ensemble infini $\mathcal{S}$ tel que pour tout $t \in \mathcal{S}$, $\alpha_i(t) = \alpha_i$ pour tout $i \in [1, j]$ et la multiplicité de $\alpha_j$ dans $Jord(U_t)$ est strictement supérieure à 4. On suppose même que $\alpha_{j-1} > \alpha_j$ si $j > 1$. Avec ces choix, pour tout $t \in \mathcal{S}$, l'orbite $U_t$ rencontre le Levi $GL(\alpha_j, F) \times G(n + (t+1)d_{\mathcal{E}} - \alpha_j)$ avec les propriétés permettant d'appliquer [12] (i.e., l'intersection contient des éléments de la forme $u_{\mathrm{reg}} \times u'$ où $u_{\mathrm{reg}}$ est un élément unipotent régulier de $GL(\alpha_j, F)$). Par une généralisation du calcul des modules de Jacquet de $\pi(\mathcal{E}, t)$, on voit donc que pour tout $t \in \mathcal{S}$, il existe un sous-ensemble $\mathcal{E}_t$ de $\mathcal{E}$ tel que $\sum_{\rho \in \mathcal{E}_t} d_\rho = \alpha_j$ et

$$\sum_{\rho \in \mathcal{E}_t} d_\rho(t + x_\rho) = \frac{1}{2}\left((j-1)\alpha_j + \sum_{k \geqslant j} \alpha_k(t) - \varepsilon(G, \alpha_j)\right),$$

où $\varepsilon(G, \alpha_j)$ est précisé dans [12] ne nous intéresse pas ici car il est indépendant de $t$. Le terme de droite se récrit :

$$\frac{1}{2}\left(m + 2(t+1)d_{\mathcal{E}} - \sum_{1 \leqslant i < j} (\alpha_i - \alpha_j) - \varepsilon(G, \alpha_j)\right).$$

Quitte à restreindre $\mathcal{S}$ sans toutefois perdre le fait que $\mathcal{S}$ est infini, on peut supposer que $\mathcal{E}_t$ ne dépend pas de $t$ ; on note $\mathcal{E}'$ cet ensemble. On fixe $t' > t$ deux éléments de $\mathcal{E}'$ et on fait la différence de l'égalité trouvée pour $t'$ avec celle trouvée pour $t$ et on a :

$$(t' - t) \sum_{\rho \in \mathcal{E}'} d_\rho = (t' - t) d_{\mathcal{E}}.$$

Cela force l'égalité $\sum_{\rho \in \mathcal{E}'} d_\rho = d_{\mathcal{E}}$. Comme $\mathcal{E}'$ est un sous-ensemble de $\mathcal{E}$, ces deux ensembles coïncident donc. On oublie $t'$ et on garde $t$ mais on récrit l'égalité en utilisant l'orbite duale de $U_t$. On note $P_1^*(t) \geqslant P_2^*(t) \geqslant \cdots$ les blocs de Jordan de cette orbite duale et on a (cf. [12], 3.4)

$$\sum_{\rho \in \mathcal{E}} d_\rho(t + x_\rho) = \sum_{\ell \leqslant d_{\mathcal{E}}} \left(P_\ell^*(t) - 1\right)/2.$$

D'où encore

$$\sum_{\rho \in \mathcal{E}} d_\rho(2x_\rho) + 2t d_{\mathcal{E}} = \sum_{\ell \leqslant d_{\mathcal{E}}} P_\ell^*(t) - d_{\mathcal{E}}$$

et

$$\sum_{\rho \in \mathcal{E}} d_\rho(2x_\rho - 1) + 2(t+1)d_{\mathcal{E}} = \sum_{\ell \leqslant d_{\mathcal{E}}} P_\ell^*(t) \leqslant m^* + 2(t+1)d_{\mathcal{E}}$$

(la dernière inégalité est simplement le fait que les $P_j^*(t)$ sont les blocs de Jordan d'une orbite unipotente de $G^*(n + (t+1)d_{\mathcal{E}})$). En enlevant $2(t+1)d_{\mathcal{E}}$ à chaque membre, on trouve le résultat annoncé.

La deuxième inégalité se démontre de façon similaire mais avec des notations horriblement plus compliquées. Fixons $\rho$ et $x_\rho$ en supposant que $x_\rho > \frac{1}{2}$ (ce qui est loisible puisque ce sont les seuls contributions positives au membre de gauche de l'inégalité cherchée). On note $St(\rho, -x_\rho, -x_\rho + [x_\rho] - 1)$ l'unique sous-module irréductible de l'induite pour $GL(d_\rho([x_\rho]), F)$ : $\bigtimes_{k\in[[x_\rho]-1,0]} \rho|\,|^{-x_\rho+k}$ ; c'est une représentation type Steinberg, tordue par un caractère. Pour $t \in \mathbb{N}$, on note $Sp(St(\rho, -x_\rho, -x_\rho + [x_\rho] - 1), t + 1)$ la représentation de $GL(d_\rho([x_\rho])(t + 1), F)$ qui est l'unique sous-module irréductible de l'induite $\bigtimes_{j\in[0,t]} St(\rho, -x_\rho, -x_\rho + [x_\rho] - 1)|\,|^{-t+j}$. Puis on considère l'induite pour $\mathcal{E}$ comme ci-dessus

$$\bigtimes_{\rho\in\mathcal{E}} Sp\bigl(St\bigl(\rho, -x_\rho, -x_\rho + [x_\rho] - 1\bigr), t + 1\bigr) \times \pi.$$

Elle a un unique quotient irréductible que l'on note, $\pi_{\mathcal{E},t}$ ; les modules de Jacquet « minimaux » de cette représentation sont de la forme $\bigotimes_{\rho',z'} \rho'|\,|^{z'} \otimes \pi$, où $\rho' \in \mathcal{E}$ et $-z' \in [x_{\rho'} - [x_{\rho'}] + 1, x_{\rho'} + t]$. Pour démontrer une telle propriété, il suffit de considérer le cas où $|\mathcal{E}| = 1$ et on le fait par récurrence sur $t$. Pour $t = 0$ : on note $\pi_{\rho,0}$ l'unique sous-module irréductible de la représentation $\rho|\,|^{-x_\rho} \times \pi$. Et on compare le module de Jacquet de l'induite $\langle \bigtimes_{k\in[[x_\rho]-1,1]} \rho|\,|^{-x_\rho+k}\rangle \times \pi_{\rho,0}$, où les $\langle\,\rangle$ représentent l'unique sous-module irréductible de la représentation écrite et le module de Jacquet de l'induite $St(\rho, -x_\rho, -x_\rho + [x_\rho] - 1) \times \pi$. C'est comme cela que l'on trouve le résultat pour $t = 0$. Pour $t > 0$, on compare les modules de Jacquet de $\pi_{\mathcal{E},t}$ avec celui de l'induite $St(\rho, -x_\rho, -x_\rho + [x_\rho] - 1)|\,|^{-t} \times \pi_{\mathcal{E},t-1}$. En fait les modules de Jacquet correspondent à des éléments d'un groupe type de Weyl qui s'identifient à des applications de l'ensemble $\{\pm i\}_{i\in[1,[x_\rho](t+1)]}$ dans lui-même qui commutent à la multiplication par $\pm 1$ et qui respectent la positivité de certaines racines. Et la propriété précédente se traduit par le fait que les éléments du groupe de Weyl qui interviennent pour déterminer le module de Jacquet de $\pi_{\mathcal{E},t}$ ne changent pas le signe (i.e., $w(i) > 0$ pour tout $i \in [1, [x_\rho](t + 1)]$).

Comme dans la première partie de la preuve, on montre que pour $t$ grand, le front d'onde de $\pi_{\mathcal{E},t}$ contient une orbite $U_t$ qui coupe le Levi $GL(\sum_{\rho\in\mathcal{E}}[x_\rho]d_\rho) \times G(n+t\sum_{\rho\in\mathcal{E}}[x_\rho]d_\rho)$ en une orbite contenant le produit d'un élément régulier de $GL(\sum_{\rho\in\mathcal{E}}[x_\rho]d_\rho)$ par un élément de $G(n + t\sum_{\rho\in\mathcal{E}}[x_\rho]d_\rho)$. La partie du module de Jacquet qui fournit une contribution au module de Jacquet tordu correspondant est de la forme

$$\bigtimes_{\rho\in\mathcal{E}} St\bigl(\rho, -x_\rho, -x_\rho + [x_\rho] - 1\bigr)|\,|^t \times \pi',$$

où $\pi'$ est une représentation convenable qui ne nous intéresse pas. On note $P_i^*(t)_{i\geqslant 1}$ les blocs de Jordan de l'orbite duale de $U_t$ et on trouve comme ci-dessus :

$$\sum_{\rho\in\mathcal{E}} d_\rho \sum_{\ell\in[0,[x_\rho]-1]} (x_\rho - \ell) + t\sum_{\rho\in\mathcal{E}} d_\rho[x_\rho] = \sum_{i\leqslant\sum_{\rho\in\mathcal{E}} d_\rho[x_\rho]} \bigl(P_i^*(t) - 1\bigr)/2.$$

On majore $\sum_i P_i^*(i)/2$ par $\frac{1}{2}m^* + (t+1)\sum_{\rho\in\mathcal{E}} d_\rho[x_\rho]$ et on trouve

$$\sum_{\rho\in\mathcal{E}} d_\rho \sum_{\ell\in[0,[x_\rho]-1]} (x_\rho - \ell) \leqslant \frac{1}{2}m^* + \frac{1}{2}\sum_{\rho\in\mathcal{E}} d_\rho[x_\rho].$$

Cela se récrit $\sum_{\rho\in\mathcal{E}} d_\rho \sum_{\ell\in[0,[x_\rho]-1]}(2x_\rho - 2\ell - 1) \leqslant m^*$. On trouve l'assertion de l'énoncé en changeant $\ell+1$ en $\ell$.

**Corollaire.** *Il n'y a qu'un nombre fini de représentations cuspidales autoduales $\rho$ de groupes linéaires pour lesquelles il existe $x_\rho \in \mathbb{R}$ avec $x_\rho > 1/2$ et l'induite $\rho|\,|^{x_\rho} \times \pi$ réductible. Ce nombre est même borné par $m^*$.*

En effet soit $\mathcal{E}$ un sous-ensemble fini de l'ensemble des représentations $\rho$ vérifiant les hypothèses de l'énoncé. On lui applique le théorème précédent et on obtient :

$$\sum_{\rho\in\mathcal{E}} d_\rho(2x_\rho - 1) \leqslant m^*.$$

Or on a vu en 2 que chaque terme du membre de gauche est dans $\mathbb{Z}$ ; comme tous ces termes sont positifs par hypothèse, le membre de gauche est supérieur ou égal à $|\mathcal{E}|$. D'où le corollaire.

## 4. Liens avec les blocs de Jordan

Soit $\pi$ une représentation cuspidale de $G(n)$ ; on note encore $Red(\pi)$ l'ensembles des représentations cuspidales unitaires, $\rho$ de $GL(d_\rho, F)$ (cela définit $d_\rho$) telle qu'il existe $x_\rho \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, $x_\rho \neq 0, 1/2$ tel que l'induite pour le groupe $G(n+d_\rho)$ de $\rho|\,|^{x_\rho} \times \pi$ soit réductible.

D'après un résultat classique d'Harish-Chandra, si $\rho \in Red(\pi)$, alors $\rho$ est autoduale ; en effet sans cette condition les modules de Jacquet des induites $\rho|\,|^x \times \rho$ sont semi-simples pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour $x = x_\rho$ cela contredirait l'unicité du quotient de Langlands. L'autodualité de $\rho$ entraîne que la fonction $L(\rho \times \rho, s)$ a un pôle en $s = 0$. Avec un résultat récent d'Henniart (cf. [6]), cela se traduit par le fait que le morphisme de $W_F$ dans $GL(d_\rho, \mathbb{C})$ qui correspond à $\rho$ par la correspondance de Langlands a la même propriété et donc se factorise soit par $Sp(d_\rho, \mathbb{C})$ (ce qui nécessite que $d_\rho$ soit pair) soit par $O(d_\rho, \mathbb{C})$. Dans le premier cas on dit que $\rho$ est symplectique et dans le deuxième que $\rho$ est orthogonal.

Les conjectures standard (qui proviennent d'Arthur) prédisent que $Red(\pi)$ est un ensemble fini et que $x_\rho$ doit être un demi-entier (pour $\rho \in Red(\pi)$) ; on peut même préciser que $x_\rho$ doit être demi-entier non entier précisément quand $\rho$ est symplectique alors que $G^*$ est orthogonal ou quand $\rho$ est orthogonal alors que $G^*$ est symplectique.

Dans le cas où $\rho \in Red(\pi)$ est un caractère quadratique, il résulte de 2 que $x_\rho$ est un demi-entier ; c'est malheureusement le seul cas où on sait le démontrer sans hypothèse sur la cuspidale.

### 4.1. Définitions générales

En [15], on a introduit, plus généralement, la notion de blocs de Jordan pour les séries discrètes, ce qui, sous certaines hypothèses, permet d'en donner une classification (cf. [15] et [17]). Rappelons la : soit $\pi$ une série discrète d'un groupe classique (ici $G(n)$), alors $Jord(\pi)$ est l'ensemble des couples $(\rho, a)$ où $\rho$ est une représentation cuspidale autoduale d'un $GL(d_\rho, F)$ (cela définit $d_\rho$) et $a \in \mathbb{N}$ vérifiant les propriétés : on note $R$ la représentation $Sym^2\, \mathbb{C}^{d_\rho}$ si $G^*(n)$ est un groupe symplectique et $\wedge^2\, \mathbb{C}^{d_\rho}$ si $G^*(n)$ est un groupe orthogonal $a$ est pair si $L(\rho, R, s)$ a un pôle en $s = 0$ et impair sinon et l'induite $St(\rho, a) \times \pi$ est irréductible, où $St(\rho, a)$ est la représentation de Steinberg basée sur $\rho$ de $GL(ad_\rho, F)$.

$L(\rho, R, s)$ est la fonction $L$ défini par Shahidi en [20] ou celle qui provient de la représentation de $W_F$ associé à $\rho$ par Langlands, Harris–Taylor, Henniart puisqu'elles coïncident d'après [6].

Toutefois ici, nous ne voulons admettre aucune conjecture et la première condition qui lie la parité de la taille des blocs de Jordan au caractère orthogonal ou symplectique de la représentation cuspidale ne peut, à l'heure actuelle, se démontrer, en dehors du cas particulier de Shahidi [20]. On va donc la modifier (cf. un peu plus loin ci-dessous), elle va alors dépendre, a priori, du support cuspidal de $\pi$, défini ci-après.

En [15] pour compléter les paramètres permettant une classification des séries discrètes, on a introduit aussi, pour $\pi$ une série discrète fixée, une fonction $\varepsilon_\pi : Jord(\pi) \to \{\pm 1\}$. Si l'on voit $Jord(\pi)$ comme un morphisme de $W_F \times SL(2, \mathbb{C})$ dans $G^*(\sum_{(\rho,a)\in Jord(\pi)} ad_\rho)$, $\varepsilon_\pi$ doit être un caractère du centralisateur de ce morphisme. On ne sait quand même pas en général définir $\varepsilon_\pi$, mais on sait définir les produits $\varepsilon_\pi(\rho, a)\varepsilon_\pi(\rho, a')$ (le même $\rho$) pour $(\rho, a)$ et $(\rho, a')$ dans $Jord(\pi)$ en acceptant $a' = 0$ si $a$ est pair et en posant alors $\varepsilon_\pi(\rho, 0) = 1$. Cette définition se fait à l'aide des modules de Jacquet de $\pi$ :

$\varepsilon_\pi(\rho, a)\varepsilon_\pi(\rho, a') = 1$ si et seulement si il existe une représentation $\pi'$ du groupe $G(n - (a - a')/2)$ et une inclusion de $\pi$ dans l'induite $\rho|\,|^{(a-1)/2} \times \cdots \times \rho|\,|^{(a'+1)/2} \times \pi'$.

Pour finir la description des paramètres et pour pallier au fait que l'on ne sait pas définir $\varepsilon_\pi$ en entier, on définit le support cuspidal partiel, $\pi_{\mathrm{cusp}}$ de la série discrète $\pi$ par $\pi_{\mathrm{cusp}}$ est l'unique représentation cuspidale d'un groupe $G(n_{\mathrm{cusp}})$ avec $n - n_{\mathrm{cusp}} \geqslant 0$ pour laquelle il existe une représentation $\rho'$ de $GL(n - n_{\mathrm{cusp}}, F)$ et une inclusion $\pi \hookrightarrow \rho' \times \pi_{\mathrm{cusp}}$. On admet évidemment $n_{\mathrm{cusp}} = 0$ auquel cas $\pi_{\mathrm{cusp}}$ est la représentation triviale.

Avec cette définition de $\pi_{\mathrm{cusp}}$, on peut modifier la toute première condition : on dit que $(\rho, a) \in Jord(\pi)$ si, en notant $x_\rho$ le point de réductibilité réel positif ou nul pour l'induite $\rho|\,|^x \times \pi_{\mathrm{cusp}}$, $2x_\rho \in \mathbb{Z}$ et $2x_\rho$ a la parité de $a - 1$. Ainsi si $x_\rho$ n'est pas demi-entier, il ne peut y avoir de blocs de Jordan relatifs à $\rho$, par définition. Dans le cas où $\pi_{\mathrm{cusp}}$ est trivial, on retrouve, grâce à [20] la définition originale avec les pôles de $L(\rho, s, R)$ en $s = 0$. Ici on veut aussi le cas des groupes métaplectiques qui n'est pas traité directement par Shahidi ; de toute façon, ce cas est de nature différente puisque la fonction $L$ est donnée a priori et il faut montrer que $L(\rho, s, Sym^2\, \mathbb{C}^{d_\rho})$ a un pôle en $s = 0$ si et seulement si la représentation induite $\rho$ à $Mp(2d_\rho, F)$ est irréductible. D'abord il faut expliquer que $GL(d_\rho, F)$ se relève dans $Mp(2d_\rho, F)$ on identifie donc $\rho$ à une représentation spécifique de ce relèvement puis on utilise la correspondance de Howe avec $O(2d_\rho + 1, F)$ (déployé) ; on peut aussi induire $\rho$ à ce groupe. Il faut vérifier que la réductibilité d'une des induites est équivalente à la réductibilité de l'autre induite. Des résultats généraux (faciles) sur la correspondance de Howe disent qu'un sous-quotient irréductible de l'une des induites correspond à un sous-quotient irréductible de l'autre induite. Notons $\tilde{\pi}$ et $\pi$ ces sous-quotients qui se correspondent. Il faut maintenant démontrer que $\tilde{\pi}$ est toute l'induite si et seulement si $\pi$ l'est. Le fait qu'une représentation coïncide avec une induite, se voit sur les modules de Jacquet. Les résultats de Kudla [8] disent que les modules de Jacquet se correspondent bien tant que $\rho$ n'est pas un caractère spécifique déterminé par la forme orthogonale servant à construire la correspondance. Mais comme on a le choix de la forme, puisque le groupe n'en dépend pas, on a l'équivalence cherchée. On obtient alors l'analogue du résultat de Shahidi pour les groupes métaplectiques grâce à son résultat pour les groupes orthogonaux.

Comme dans tous les papiers que nous avons écrits avec $Jord(\pi)$, nous avions mis des conjectures telles que les deux définitions coïncident, il n'y a pas lieu de les distinguer. Et ici, on prend la deuxième définition, qui ne nécessite aucune conjecture.

### *4.2. Blocs de Jordan des représentations cuspidales*

**Lemme.** *Soit $\pi$ une représentation cuspidale de $G(n)$. Alors $Jord(\pi) = \{(\rho, 2x_\rho + 1 - 2\ell);\ \ell \in [1, [x_\rho]]\}$, où $\rho$ parcourt l'ensemble des représentations cuspidales autoduales des groupes linéaires telles que $x_\rho$ (le point de réductibilité pour l'induite $\rho|\,|^x \times \pi$) est demi-entier $> 1/2$.*

En effet, d'après Harish-Chandra (cf. [25]), soit $\rho$ une représentation cuspidale unitaire de $GL(d_\rho, F)$ (cela définit $d_\rho$). Alors le composé des opérateurs d'entrelacements standard ($s \in \mathbb{C}$) :

$$\rho|\,|^s \times \pi \to \rho|\,|^{-s} \times \pi \to \rho|\,|^s \times \pi$$

est au voisinage de $\mathbb{R}$ méromorphe avec comme seul possibilité de pôle, un pôle double en $s = 0$ et cela précisément quand l'induite $\rho \times \pi$ est irréductible. Quant aux zéros, ils n'y en a pas si la fonction n'a pas de pôles en $s = 0$ (i.e., si $x_\rho = 0$) et sinon il y a deux zéros simples en $\pm x_\rho$. Ici, il faut remarquer que dans [18], le cas des groupes métaplectiques n'est pas considéré. Il n'y a sans doute pas de difficulté à l'inclure mais quand même... il vaut mieux éviter de l'utiliser. Pour rassurer le lecteur, le lemme peut se démontrer uniquement par des propriétés de module de Jacquet, il n'y a alors pas de difficulté à inclure les groupes métaplectiques ; il n'en sera plus de même dans la proposition suivante.

Ainsi à une fonction holomorphe inversible près au voisinage de $\mathbb{R}$, ce composé s'écrit

$$L(\rho \times \rho, s)L(\rho \times \rho, -s)/L(\rho \times \rho, s + x_\rho)L(\rho \times \rho, -s + x_\rho).$$

De façon beaucoup plus compliquée mais totalement équivalente, cela se récrit comme le produit des fonctions ci-dessous, où $Red(\pi)$ est l'ensemble des $\rho'$ cuspidales autoduales pour lesquelles le point de réductibilité n'est ni 0 ni 1/2

$$L(\rho \times \rho, s)L(\rho \times \rho, -s)/L\big(\rho \times \rho, s + x_\rho - [x_\rho]\big)L\big(\rho \times \rho, -s + x_\rho - [x_\rho]\big)$$

$$\bigtimes_{\rho'\in Red(\pi)} L\big(\rho\times\rho', s+\big(x_{\rho'}-[x_{\rho'}]\big)\big)/L\big(\rho\times\rho', s+x_{\rho'}\big)$$
$$\bigtimes_{\rho'\in Red(\pi)} L\big(\rho\times\rho', -s+\big(x_{\rho'}-[x_{\rho'}]\big)\big)/L\big(\rho\times\rho', -s+x_{\rho'}\big). \qquad (*)$$

On écrit $\phi(\rho,\pi,s)$ ce produit. On est maintenant en mesure de calculer $Jord(\pi)$ ; c'est par définition l'ensemble des couples $(\rho,a)$ tel que $x_\rho$ est demi-entier, $a$ a la parité de $2x_\rho-1$ et le composé des opérateurs d'entrelacement standard :

$$St(\rho,a)|\,|^s\times\pi\to St(\rho,a)|\,|^{-s}\times\pi\to St(\rho,a)|\,|^s\times\pi$$

a un pôle en $s=0$. On calcule cet opérateur en remplaçant $St(\rho,a)|\,|^s$ par l'induite $\bigtimes_{k\in[1,a]}\rho|\,|^{(a+1)/2-k+s}$ et on décompose complètement l'opérateur d'entrelacement en opérateurs élémentaires. C'est pénible à écrire mais finalement on trouve le produit des fonctions

$$\prod_{k'\in[(a-1)/2,-(a-1)/2]} \phi\big(\rho,\pi,s+k'\big),$$

multiplié encore par ce qui provient des opérateurs entre groupes linéaires c'est à dire :

$$\bigtimes_{k'\in[(a-1)/2,-(a-1)/2]} L\big(\rho\times\rho, 2s+2k'+1\big)/L\big(\rho\times\rho, 2s+k'+(a+1)/2\big)$$
$$\bigtimes_{k'\in[(a-1)/2,-(a-1)/2]} L\big(\rho\times\rho, -2s+2k'+1\big)/L\big(\rho\times\rho, -2s+k'+(a+1)/2\big),$$

où $k'$ varie dans un intervalle de demi-entiers non entiers si $a$ est pair. Cette fonction a, en $s=0$, l'ordre de la fonction

$$L\big(\rho\times\rho, 2s-2\big(x_\rho-[x_\rho]\big)+1\big)L\big(\rho\times\rho, -2s-2\big(x_\rho-[x_\rho]\big)+1\big)$$

puisque l'intervalle qui intervient, ne contient $-1/2$ que si $x_\rho$ est demi-entier et il le contient alors une fois. Finalement, cela permet de simplifier dans le calcul de l'ordre en $s=0$ du composé des opérateurs d'entrelacement, ce qui correspond à la première ligne (cf. $(*)$ ci-dessus) : en effet si $x_\rho$ est entier ni la contribution dite des groupes linéaires ni $(*)$ n'interviennent pour le calcul de l'ordre du composé en $s=0$ ; par contre si $x_\rho$ est demi-entier, la contribution de $(*)$ n'intervient que pour $\phi(\rho,\pi,s+1/2)$ et $\phi(\rho,\pi,s-1/2)$ via son dénominateur mais elle est annulée par la contribution ci-dessus. Le produit des opérateurs d'entrelacement est donc à une fonction holomorphe inversible près en $s=0$ le produit par la fonction

$$\bigtimes_{\rho'\in Red(\pi)}\ \bigtimes_{k'\in[-(a-1)/2,(a-1)/2]} L\big(\rho\times\rho', \pm s+k'+x_{\rho'}-[x_{\rho'}]\big)/L\big(\rho\times\rho', \pm s+k'+x_{\rho'}\big),$$

où la notation $\pm$ signifie que l'on fait le produit de la fonction correspondant au signe $+$ avec la fonction correspondant au signe $-$. Maintenant la proposition est claire.

Mais pour la suite, on remarque que la fonction ci-dessus se récrit de façon a priori plus compliquée mais strictement équivalente (à une fonction holomorphe inversible près au voisinage de l'axe réel) comme le produit sur tous les $k' \in [-(a-1)/2, (a-1)/2]$

$$\prod_{\rho' \in Red(\pi)} \prod_{\ell \in [1,[x_{\rho'}]]} \prod_{k \in [-(x_{\rho'}-\ell),(x_{\rho'}-\ell)]} L\big(\rho \times \rho', \pm s + k' + k\big) / L\big(\rho \times \rho', \pm s + k' + k + 1\big).$$

En effet, la fonction ci-dessus a le produit sur les $k$ qui se simplifie pour donner :

$$\prod_{\rho' \in Red(\pi)} \prod_{\ell \in [1,[x_{\rho'}]]} L\big(\rho \times \rho', \pm s + k' - x_{\rho'} + \ell\big) / L\big(\rho \times \rho', \pm s + k' + x_{\rho'} - \ell + 1\big).$$

Puis on utilise le fait que la fonction $L(\rho \times \rho', s)$ diffère de la fonction $L(\rho \times \rho', -s)$ par une fonction holomorphe inversible près au voisinage de l'axe réel, on peut donc changer $L(\rho \times \rho', \pm s + k' - x'_\rho + \ell)$ en $L(\rho \times \rho', \pm s - k' + x'_\rho + \ell)$. Mais l'intervalle dans lequel $k'$ varie est stable par la multiplication par $\pm 1$. On remplace $k'$ par $-k'$ et on refait une simplification dans le produit sur $\ell$. D'où l'assertion. Et maintenant on fait une simplification dans les produits sur $k'$ en fixant $\ell$ et $k$ pour trouver :

$$\prod_{\rho' \in Red(\pi)} \prod_{\ell \in [1,[x_{\rho'}]]} \prod_{k \in [-(x_{\rho'}-\ell),(x_{\rho'}-\ell)]} \frac{L\big(\rho \times \rho', \pm s - (a-1)/2 + k\big)}{L\big(\rho \times \rho', \pm s + (a+1)/2 + k\big)}.$$

## *4.3. Blocs de Jordan d'une série discrète et support cuspidal*

Passons maintenant au cas d'une série discrète, $\pi$, générale. On fixe un ensemble de couples $\mathcal{E}$, avec multiplicité, formé d'une représentation cuspidale unitaire $\rho'$ d'un groupe linéaire et d'un nombre réel $z'$ tel que $\pi$ soit sous-quotient de l'induite

$$\prod_{(\rho',z') \in \mathcal{E}} \rho' |\,|^{z'} \times \pi_{\text{cusp}}.$$

On note $\mathcal{E}_{\text{en}}$ le sous-ensemble de $\mathcal{E}$ formé des couples $(\rho', z')$ avec $\rho'$ autoduale et $z'$ demi-entier et on pose

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\pi) := &\big\{\big(\rho', z'\big), \big(\rho', -z'\big);\ \big(\rho', z'\big) \in \mathcal{E}_{\text{en}}\big\} \\ &\cup \big\{(\rho, k);\ \rho \in Red(\pi) \mid x_\rho \in \tfrac{1}{2}\mathbb{N},\ k \in \big[-(x_\rho - 1), (x_\rho - 1)\big]\big\}. \end{aligned}$$

Cette définition est indépendante du choix de $\mathcal{E}$.

**Proposition.** *On suppose que $G(n)$ est un groupe algébrique, cela exclut le cas des groupes métaplectiques. Soit $\pi$ une série discrète. Alors $Jord(\pi)$ et $\mathcal{S}(\pi)$ se déterminent mutuellement par l'égalité* :

$$\bigcup_{(\rho,a) \in Jord(\pi)} \big\{(\rho, k);\ k \in \big[-(a-1)/2, (a-1)/2\big]\big\} = \mathcal{S}(\pi).$$

On a exclut le cas des groupes métaplectiques pour pouvoir utiliser tranquillement les résultats d'Harish-Chandra ; cette exclusion n'est sûrement pas nécessaire.

On doit calculer l'ordre en $s=0$ du composé des opérateurs d'entrelacement standard

$$St(\rho,a)|\,|^s\times\pi\to St(\rho,a)|\,|^{-s}\times\pi\to St(\rho,a)|\,|^s\times\pi.$$

Pour cela, on remplace encore $\pi$ par $\times_{(\rho',z')\in\mathcal{E}}\rho'|\,|^{z'}\times\pi_{\text{cusp}}$. Ensuite, on a des produits d'opérateurs d'entrelacement standard soit pour des groupes linéaires (et ils sont alors bien connus grâce entre autre à Shahidi [21]) soit pour un groupe de même type que $G(n)$ mais avec des cuspidales. C'est le cas étudié dans la proposition ci-dessus au moins si $\pi_{\text{cusp}}$ est non trivial et $a$ a la parité de $2x_\rho-1$. Finalement on trouve, si $\pi_{\text{cusp}}$ est non trivial et si $a$ a la parité de $2x_\rho-1$, que le composé des opérateurs d'entrelacement est, à une fonction holomorphe inversible près en $s=0$, la fonction méromorphe produit

$$\bigtimes_{(\rho',z')\in\mathcal{S}(\pi)} L\bigl(\rho\times\rho',\pm s-(a-1)/2\pm z'\bigr)/L\bigl(\rho\times\rho',\pm s+(a+1)/2\pm z'\bigr).$$

Pour calculer l'ordre en $s=0$ de cette fonction, pour tout demi-entier $b$ et pour tout $\rho$ comme ci-dessus, on pose

$$n_0(\rho,b):=\bigl|\bigl\{\bigl(\rho',z'\bigr)\in\mathcal{S};\ \rho'\simeq\rho,\ z'=b\bigr\}\bigr|.$$

L'ordre en $s=0$ du produit des opérateurs d'entrelacement est donc $2(n_0(\rho,(a+1)/2)-n_0(\rho,(a-1)/2))$. Mais a priori on sait que cet ordre est 0 ou $-2$. On en déduit, en faisant varier $a$ parmi les entiers de la parité de $2x_\rho-1$, qu'il existe, pour $\rho$ fixée, une collection $J_\rho$ d'entier sans multiplicité tel que les ensembles suivants coïncident :

$$\begin{aligned}&\bigcup_{c\in J_\rho}\bigl\{(\rho,k);\ k\in\bigl[-(c-1)/2,(c-1)/2\bigr]\bigr\}\\&\quad=\bigl\{\bigl(\rho',z'\bigr)\in\mathcal{S}(\pi);\ \rho'\simeq\rho,\ z'-\bigl[z'\bigr]=x_\rho-[x_\rho]\bigr\}.\end{aligned}$$

Et les blocs de Jordan de $\pi$ sont alors les $(\rho,c)$ pour $c\in J_\rho$ avec la parité déterminée par celle de $2x_\rho-1$.

On veut encore montrer que $\mathcal{S}(\pi)$ ne contient pas de termes $(\rho,z')$ avec $2z'$ de la parité opposée à $2x_\rho$. On reprend les calculs ci-dessus, en prenant $a$ de la parité opposée à celle de $2x_\rho$. On a utilisée l'hypothèse sur la parité de $a$ dans l'étude du cas cuspidale ; si $a$ n'a pas la bonne parité dans la contribution de $\pi_{\text{cusp}}$, il y a une simplification qui ne se fait plus : si $2x_\rho$ est pair, le terme $L(\rho\times\rho,\pm s+x_\rho-[x_\rho])$ ne se simplifie plus et donne un zéro indésirable. Dans le cas où $2x_\rho$ est impair, il y a au contraire un pôle double supplémentaire qui apparaît et dans les calculs ci-dessus, on a des pôles qui sont d'ordre 4 par exemple pour $(a-1)/2$ tel que $(\rho,(a-1)/2)\in\mathcal{S}$ et $(\rho,z')\notin\mathcal{S}$ pour $z'$ demi-entier non entier strictement plus grand que $(a-1)/2$. D'où encore la contradiction.

Il reste encore le cas où $\pi_{\text{cusp}}$ est trivial mais c'est beaucoup plus facile grâce aux résultats de Shahidi. On ne le fait pas.

**Corollaire.** *On suppose que $G(n)$ n'est pas métaplectique.*

(i) *Soit $\pi$ une série discrète de $G(n)$ ; alors $\sum_{(\rho,a)\in Jord(\pi)} ad_\rho \leqslant m^*$.*
(ii) *Soit $\pi$ une série discrète et l'on suppose que $\sum_{(\rho,a)\in Jord(\pi)} ad_\rho = m^*$. Alors, le support cuspidal partiel, $\pi_{\mathrm{cusp}}$ vérifie aussi $\sum_{(\rho,a)\in Jord(\pi_{\mathrm{cusp}})} ad_\rho = (m_{\mathrm{cusp}})^*$.*

On a déjà démontré (i) dans le cas où $\pi$ est cuspidale et la proposition ci-dessus l'étend au cas général. (ii) résulte aussi de la proposition ci-dessus.

## 5. Le cas quadratique unipotent

### *5.1. Énoncés*

Ce qui manque dans le paragraphe précédent est que l'on ne démontre pas que les points de réductibilité (dans le cas cuspidal) sont $1/2$ entiers. On va le démontrer dans le cas particulier suivant. Remarquons avant d'énoncer le théorème que pour $x$ un demi-entier positif

$$\sum_{\ell\in[1,[x]]} 2x-2\ell+1=[x+1/2][x],$$

où les crochets sont les parties entière. Cela permet de penser à l'hypothèse du théorème

$$\sum_{\eta\in Quad(\pi)}\sum_{\ell\in[1,[x_\eta]]} 2x_\eta-2\ell+1\geqslant m^*$$

comme étant

$$\sum_{\eta\in Quad(\pi)}[x_\eta+1/2][x_\eta]\geqslant m^*.$$

**Théorème.** *Soit $\pi$ une représentation cuspidale de $G(n)$ et soit $Red(\pi)$ comme ci-dessus. On suppose qu'il existe un sous-ensemble $Quad(\pi)$ de $Red(\pi)$ formé de caractères quadratiques tels que*

$$\sum_{\eta\in Quad(\pi)}\sum_{\ell\in[1,[x_\eta]]}(2x_\eta-2\ell+1)\geqslant m^*,$$

*alors*

(i) *$Quad(\pi)=Red(\pi)$ et l'inégalité ci-dessus est une égalité.*
(ii) *$x_\eta$ est demi-entier non entier si $G$ est orthogonal « impair » et est entier si $G$ est symplectique ou orthogonal « pair ». Pour $\rho$ une représentation cuspidale autoduale de $GL(d_\rho,F)$ (cela définit $d_\rho$), non dans $Quad(\pi)$ le point de réductibilité $x_\rho\in\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ pour l'induite $\rho|\,|^{x_\rho}\times\pi$ est $0$ si $L(\rho,s,R)$ n'a pas de pôle en $s=0$ et $1/2$ sinon.*

(iii) $\pi$ *est une représentation quadratique unipotente au sens de* [14], 5.2 (*rappelé en* 5.2 *ci-dessous, donc appartient à une famille* (*on enlève l'hypothèse cuspidale*) *classifiée par des paramètres de Langlands–Arthur*).

On peut tout de suite préciser (iii) ; dans loc. cit. on parlait de représentation quadratique unipotente stricte (stricte est vérifié ici aussi) et on a mis en bijection ces représentations avec les paramètres d'Arthur $(\psi,\sigma)$ où $\psi$ est un morphisme de $W_F \times SL(2,\mathbb{C})$ dans $G^*$ dont l'image n'est pas incluse dans un Levi (c'est cela l'hypothèse stricte) dont la restriction à $W_F$ est somme de caractères quadratiques et où $\sigma$ est un caractère du centralisateur de $\psi$ ; le morphisme $det \circ \psi_{|W_F}$ ainsi que la restriction au centre de $G^*$ sont imposés par $G$ (cf. [14], 2.1 et 2.3). Si l'on prend les duales de ces représentations par la généralisation de l'involution d'Iwahori–Matsumoto (cf. [2,19]), on obtient des séries discrètes (cf. la remarque à la fin de 5.2 ci-dessous) ; ces séries discrètes quadratiques unipotentes sont classifiées par les mêmes paramètres (le rôle de $SL(2,\mathbb{C})$ a simplement changé) et on obtient ce qui doit être le paramètre de Langlands ; les cuspidales sont invariantes par l'involution, d'où le terme paramètre d'Arthur–Langlands de l'énoncé.

Soient $\pi$ et $Quad(\pi)$ satisfaisant aux conditions du théorème. Le morphisme $\psi$ qui est associé à $\pi$ se décrit ainsi :

$GL(m^*,\mathbb{C})$ contient le groupe $\bigtimes_{\eta\in Quad(\pi)} \bigtimes_{d\in[1,[x_\eta]]} GL(2x_\eta - 2d + 1,\mathbb{C})$. Pour tout entier $b$, on note $\rho_b$ la représentation irréductible de $SL(2,\mathbb{C})$ de dimension $b$. On rappelle que cette représentation est orthogonale si $b$ est impair et symplectique si $b$ est pair. Ainsi on définit le morphisme $\psi$ en composant

$$\bigtimes_{\eta\in Quad(\pi)} \bigtimes_{d\in[1,[x_\eta]]} \eta \times \rho_{2x_\eta - 2d+1}$$

avec l'inclusion précédente et en remarquant que la condition de parité assure que $\psi$ se factorise par $G^*(n)$ le groupe dual de $G(n)$.

Il est plus difficile de définir $\sigma$ ; rappelons que $\sigma$ s'identifie à un morphisme de

$$\bigtimes_{\eta\in Quad(\pi)} \bigtimes_{d\in[1,[x_\eta]]} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \{\pm 1\};$$

on note $\sigma_{\eta,2x_\eta-2d+1}$ la restriction de $\sigma$ au facteur indexé par $\eta$ et $d$. On vérifiera que

**Proposition.**

(i) *Avec les notations précédentes, en particulier $\pi$ est supposée cuspidale, $\pi$ est dans le paquet de représentations associées à $\psi$ décrit ci-dessus et le caractère du centralisateur de l'image de $\psi$ vérifie $\sigma_{\eta,2x_\eta-2d+1} \neq \sigma_{\eta,2x_\eta-2d-1}$, si $d < [x_\eta]$. Dans le cas où $x_\eta$ est demi-entier non entier* (*c'est-à-dire si $G$ est une forme de $SO(2n+1)$*) *on a en plus $\sigma_{\eta,2} = -1$. Ceci veut dire que $\sigma$ est uniquement déterminé par $Quad(\pi)$ dans le cas des groupes orthogonaux impairs.*

(ii) *La paramétrisation ci-dessus coïncide avec celle de Lusztig donnée dans le cas des groupes orthogonaux impairs et sous l'hypothèse que $Quad(\pi)$ est formé de caractères non ramifiés de $F^*$.*

Cette « correspondance » entre représentation quadratique unipotente stricte et couple $(\psi,\sigma)$ est essentiellement celle de [14] et se fait à l'aide du front d'onde, on fait des rappels ci-dessous. Toutefois l'on introduit ici une différence : soit $\pi$ une représentation quadratique unipotente stricte (ou discrète) du groupe orthogonale d'un espace vectoriel $X$, muni d'une forme de discriminant $\eta_X$ et d'invariant de Hasse $\varepsilon_X$. On note ici $G(X)$ ce groupe orthogonal. La correspondance de [14] dépend de $X$ et pas seulement de $G(X)$ (je ne peux pas éviter cela) mais ici il vaut mieux modifier cette correspondance en posant que $\pi$ correspond au couple $(\psi,\sigma)$ si dans la correspondance de [14] la représentation $\pi\otimes\chi_X$ correspond à $(\psi,\sigma)$ où $\chi_X$ est le caractère de $G(X)$ :

$$\forall g\in G(X)\ \chi_X(g)=\big(\eta_X,\det g\, Nsp(g)\big)\varepsilon_X(\det g),$$

où $Nsp(g)$ est la norme spinorielle et où $(\,,\,)$ est le symbole quadratique. L'intérêt de cette modification est expliquée ci-dessous. On ne change rien dans le cas des groupes symplectiques ou métaplectiques par rapport à [14].

### 5.2. *Rappel de* [14]

Soit $\pi$ une représentation quadratique unipotente stricte (ou discrète) correspondant avec la modification ci-dessus au paramètre d'Arthur $(\psi,\sigma)$. On écrit les blocs de Jordan de $(\psi,\sigma)$ sous la forme $(\eta_i,P_i,\sigma_i)_{i\in[1,t]}$ ; $z$ où $t\in\mathbb{N}$ et où l'on impose $P_i>P_i'$ si $i<i'$ mais $\eta_i=\eta_{i'}$, où $z$ n'apparaît que si $G(n)$ est un groupe orthogonal impair et $z$ est alors le caractère central (identifié à $\pm1$) : c'est la décomposition en représentation irréductible de la représentation de $W_F\times SL(2,\mathbb{C})\times Cent_{G^*(n)}(\psi)$, légèrement ordonnée. En particulier ces notations signifient que le morphisme de $W_F\times SL(2,\mathbb{C})$ dans $G^*(n)$ se factorise par le sous-groupe $\bigtimes_{i\in[1,t]}A(P_i,\mathbb{C})$ où $A(P_i,\mathbb{C})$ est $Sp(P_i,\mathbb{C})$ si $P_i$ est pair et $O(P_i,\mathbb{C})$ si $P_i$ est impair ; le composé de $\psi_{|W_F}$ avec la projection sur $A(P_i,\mathbb{C})$ pour $i\in[1,t]$ est le caractère quadratique $\eta_i$ vu comme morphisme de $W_F$ dans le centre de $A(P_i,\mathbb{C})$. L'ensemble des couples $(\eta_i,P_i)_{i\in[1,t]}$ est aussi appelé l'ensemble des blocs de Jordan de $\psi$. Sur les paramètres la modification introduite dans le paragraphe précédent par rapport à la correspondance de [14] se traduit par le fait que $(\psi,\sigma)$ était, dans le cas où $G(n)$ est le groupe orthogonal d'une forme de discriminant $\eta_q$ et d'invariant de Hasse $\varepsilon_q$ $(\eta_i\eta_q,P_i,\sigma_i\varepsilon_q)$ si $\dim q$ est paire et $(\eta_i\eta_q,P_i,\sigma_i)$; $z\varepsilon_q$ si $\dim q$ est impaire.

Si $G(n)$ est orthogonal, supposons d'abord que $\eta_1=1$ et $\varepsilon_1=1$ et on note $Y$ l'espace symplectique, sur $F$, de dimension $\sum_{i\in[2,t]}P_i$ ; alors la représentation $\bigoplus_{i\in]1,t]}(\eta_i,P_i,\sigma_i)$ se réalise dans le groupe dual de $G(n)^-:=Sp(Y)$ si $G(n)$ est un groupe orthogonal pair et dans le groupe dual de $G(n)^-:=Mp(Y)$ (c'est-à-dire le groupe $Sp(\dim Y,\mathbb{C})$) si $G(n)$ est un groupe orthogonal impair. On note $\pi^-$ la représentation de $G(n)^-$ qui correspond à ce paramètre dans [14]. On a démontré (cf. [14], 3.3.6) que $\pi\otimes\chi_X$ correspond à $\pi^-$.

On a simplifié loc. cit. puisque l'on s'est limité au cas où $\eta_1$ et $\sigma_1$ sont triviaux. Si $\pi$ n'a pas cette propriété, on a montré qu'il existe un caractère $\chi_1$ de $G(n)$ tel que $\chi_1\otimes\pi$ ait cette propriété. On aura besoin de savoir quels sont les paramètres de $\chi_1\otimes\pi$ ; donnons les uniquement dans le cas du groupe orthogonal pair pour éviter le « $z$ ». Si $\pi$ correspond à $(\eta_i,P_i,\sigma_i)$ comme ci-dessus, alors $\chi_1\otimes\pi$ correspond à $(\eta_i\eta_1,P_i,\sigma_i\sigma_1)$ ; en outre $\chi_1$ restreint à un élément, $g$, de déterminant 1 de $G(n)$ vaut $(\eta_1,Nsp(g))$.

Soit $\nu$ un caractère de $F^*$, on note $Jac_\nu\,\pi$ la composante isotypique de caractère $\nu$, sous l'action de $F^*$, du module de Jacquet pour un parabolique de Levi $F^* \times G(n-1)$ (si un tel parabolique existe, sinon on pose $Jac_\nu\,\pi = 0$). On définit de même $Jac_\nu\,\pi^-$. Alors on a d'après Kudla repris par exemple en [13], 4.2.1 : on suppose que $\nu \neq |\,|^{(P_1-1)/2}$ ($(P_1-1)/2$ est le $d(X,Y)$ de loc. cit.) alors

$$Jac_\nu(\pi \otimes \chi_1) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad Jac_\nu\bigl(\pi^-\bigr) \neq 0.$$

On a gagné la suppression du caractère noté $\eta_X$ en loc. cit (car on l'a mis avant).

Supposons maintenant que $G(n)$ est un groupe symplectique ou métaplectique et soit encore $\pi$ correspondant à $(\psi,\sigma)$ avec la décomposition $(\eta_i, P_i, \sigma_i)_{i\in[1,t]}$. On note $(\psi^-,\sigma^-)$ le paramètre $(\eta_i, P_i, \sigma_i)_{i\in[2,t]}$ ; il correspond à un groupe orthogonal $G^-(n^-)$ et une représentation $\pi^-$ de ce groupe ; dans le cas où $G(n)$ est le groupe métaplectique, $G^-(n^-)$ est un groupe orthogonal impair et il faut donc aussi préciser le caractère du centre du groupe mais sa valeur exacte ne nous sert pas (on renvoit donc à [14], pp. 287 et 288 ; on rappelle que la correspondance a été modifiée). On peut préciser que le groupe est $O(q)$ où $q$ est la forme orthogonale de discriminant $\eta_1$, d'invariant de Hasse $\sigma_1$ et de dimension $\sum_{i\in[2,t]} P_i$ si $G(n)$ est symplectique et $1+\sum_{i\in[2,t]} P_i$ si $G(n)$ est métaplectique. On note $Y$ l'espace de cette forme et $\chi_Y$ l'analogue de $\chi_X$ défini ci-dessus. On a encore grâce à [14], 3.3.6, que $\pi$ et $\pi^- \otimes \chi_Y$ se correspondent dans la correspondance de Howe. Soit $\nu$ un caractère de $F^*$ ; on suppose que $\nu$ n'est pas le caractère $\eta_1|\,|^{(P_1-1)/2}$ alors

$$Jac_\nu(\pi) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad Jac_\nu\bigl(\pi^-\bigr) \neq 0.$$

Il est préférable de donner la propriété suivante dont nous n'avions pas besoin en loc. cit.

### *5.3. Séries discrètes quadratiques unipotentes*

**Remarque.** Le dual au sens de l'involution généralisée d'Iwahori–Matsumoto [2,19] d'une représentation quadratique unipotente stricte est une série discrète.

Cela se démontre par récurrence. On fixe $\pi$ une représentation quadratique unipotente stricte. On doit démontrer la propriété suivante : soit $(\rho_k, x_k)_{k\in[1,v]}$ une collection ordonnée de couples où $\rho_k$ est une représentation cuspidale unitaire d'un groupe linéaire $GL(d_k, F)$ (cela définit $d_k$) et $x_k \in \mathbb{R}$ et soit $\pi'$ une représentation d'un groupe $G(n')$ de même type que $G(n)$ avec une inclusion : $\pi \hookrightarrow \times_{k\in[1,v]} \rho_k|\,|^{x_k} \times \pi'$, alors $\sum_{k\in[1,v]} x_k d_k < 0$. Quitte à tordre par un caractère, on sait que $\pi$ est l'image d'une représentation de même type, $\pi^-$, par une correspondance de Howe convenable. Les résultats de Kudla [8] sous leur forme la plus simple, entraînent que quitte à enlever de la collection $(\rho_k, x_k)$ des couples du type $(\eta, x)$ avec $\eta$ caractère quadratique et $x \in \mathbb{Z}_{<0}$, on a une inclusion du même type pour $\pi^-$. On obtient l'inégalité cherchée par récurrence.

On appelle séries discrètes quadratiques unipotentes les duales des représentations quadratiques unipotentes strictes. C'est un ensemble qui est donc mis en bijection avec les paramètres de Langlands $(\psi,\sigma)$ en transportant les constructions de [14] par la dualité.

### 5.4. Preuve du théorème

On espère que le paragraphe précédent montre la symétrie entre tous les cas mais il est difficile de tout traiter en même temps. Ici on ne traite que le cas où $G(n)$ est un groupe symplectique c'est le cas qui demande le moins de notations parce qu'il n'y a pas à introduire $\chi_1$. Dans ce cas $x_\eta$ est entier, on peut donc supprimer les parties entières (ci-dessous) que l'on a pourtant laissées.

On fixe $\pi$ une représentation cuspidale de $G(n)$ et on note $Quad'(\pi)$ l'ensemble des caractères quadratiques, $\eta$, de $F^*$ pour lesquels il existe un réel, $x_\eta > 1/2$ tel que l'induite $\eta|\,|^{x_\eta} \times \pi$ soit réductible. Donc $Quad'(\pi) \supset Quad(\pi)$ avec les notations de l'énoncé du théorème ; l'inégalité de l'énoncé est évidemment encore vérifiée avec $Quad'(\pi)$. Pour chaque $\eta \in Quad'(\pi)$, et pour $j \in [[x_\eta] - 1, 0]$, on fixe $a_{\eta,j} \in \mathbb{N}$ et on suppose que $a_{\eta,j} \gg a_{\eta,j+1}$ si $j < [x_\eta] - 1$ note $\pi_{\{\eta,a_{\eta,j}\}}$ l'unique quotient irréductible (l'unicité n'est pas difficile) :

$$\bigtimes_{\eta\in Quad'(\pi)} \bigtimes_{j\in[[x_\eta]-1,0]} \bigtimes_{\ell\in[a_{\eta,j},0]} \eta|\,|^{x_\eta - j+\ell} \times \pi \to \pi_{\{\eta,a_{\eta,j}\}}.$$

On remarque que cette définition ne dépend pas de l'ordre dans lequel on prend les éléments de $Quad'(\pi)$, par contre il faut respecter l'ordre entre les $j$ et les $\ell$ ; pour fixer les idées, on fixe un ordre sur $Quad'(\pi)$ et on prend les éléments de $Quad'(\pi)$ dans l'ordre décroissant. On va d'abord démontrer que cette représentation est totalement de petit rang (cf. ci-dessous pour la définition) si $a_{\eta,j} \gg a_{\eta',j'}$ quand $\eta'$ précède $\eta$ (pour tout $j$ et $j'$). Totalement de petit rang, veut dire que pour tout $(U,\tau) \in FO(\pi_{\{\eta,a_\eta\}})$, $U$ est totalement de petit rang ce qui veut encore dire que l'orbite duale de l'orbite $U$ vue sur $\overline{F}$ a des blocs de Jordan $P_1 \gg P_2 \gg \cdots$. Si l'on ne veut pas passer à l'orbite duale, la définition est que les blocs de Jordan de $U$, $(\alpha, \mathrm{mult}_U(\alpha))$ où $\alpha \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{mult}_U(\alpha)$ est la multiplicité de $\alpha$ parmi les blocs de Jordan de $U$, vérifient si $\alpha > 1$ avec $\mathrm{mult}_U(\alpha) \neq 0$, $\mathrm{mult}_U(\alpha-1) \gg \mathrm{mult}_U(\alpha)$ ; on n'a vraiment pas besoin de préciser ce que veut dire $\gg$.

Montrons cela. Soit $\eta_1$ le plus petit élément de $Quad'(\pi)$. On définit $\pi_{\eta_1,a_1}$ comme l'unique quotient irréductible de l'induite $\bigtimes_{\ell\in[a_1,0]} \eta_1|\,|^{x_{\eta_1}+\ell} \times \pi$. Si $a_1 \gg 0$, alors $\pi_{\eta_1,a_1}$ est de petit rang, c'est-à-dire que pour $(U,\tau) \in FO(\pi_{\eta_1,a_1})$ et pour $u \in U$, la dimension de $\mathrm{Ker}\, u > n + a_1 + 1$. En effet, on a vu en 2, que pour $a_1$ grand, on a l'égalité :

$$a_1 + x_{\eta_1} = \tfrac{1}{2}\left|Jord(U)\right| - \varepsilon(G),$$

où $\varepsilon_G$ vaut 1/2 ou 0. Or $\dim \mathrm{Ker}\, u = |Jord(U)|$ d'où $\dim \mathrm{Ker}\, u \geqslant 2a_1 + 2x_{\eta_1} > 2a_1$. Pour $a_1$ grand, on a donc l'inégalité cherchée. On rappelle que $U$ est uniquement déterminée, comme orbite unipotente, par ses blocs de Jordan, $Jord(U)$, comptés avec multiplicité et par la donnée pour chaque bloc de Jordan de taille paire, $a$, d'une forme quadratique $q_a$. On note $Y$ l'espace orthogonal de dimension $\sum_{a\in Jord(U)} \mathrm{mult}_U(a)(a-1)$ muni d'une forme de même discriminant et de même invariant de Hasse que la forme $\sum_{a \text{pair}} q_a$ ; on note $\chi_Y$ le caractère correspondant du groupe orthogonal (cf. ci-dessus). On a démontré à la suite de Howe (cf. [13], 1.1 et 1.2, pour le cas des groupes orthogonaux) que $\pi_{\eta_1,a_1}$ est l'image par la correspondance de Howe d'une représentation $\pi^- \otimes \chi_Y$ de $G(Y)$ (on tord par le caractère $\chi_Y$ pour qu'à la fin de la preuve le $\pi^-$ soit celui du paragraphe précédent). On note $G^-(n^-)$ le groupe $G(Y)$ ; on a l'égalité de dimension, où l'on a noté $(m^-)^*$ l'analogue de $m^*$ pour $G^-(n^-)$ :

$$(m^-)^* = m^* + 2a_1 + 2 - (2x_{\eta_1} + 2a_1 - 1), \quad \text{d'où } (m^-)^* = m^* - 2x_{\eta_1} + 1.$$

Comme on a supposé que $x_{\eta_1} > 1/2$, on a $(m^-)^* < m^*$. On va donc pouvoir faire des récurrences. Pour cela on va montrer :

**Lemme.** *Avec les notations ci-dessus, $\pi^-$ est cuspidale.*

On note $Y$ l'espace dont $G^-(n^-)$ est le groupe d'automorphismes (ou revêtement) et $Y_0$ « son » noyau anisotrope. D'après les résultats de Kudla [8] (cf. l'énoncé de [24], 5 théorème), il existe $Y'$ dans la tour de Witt de $Y_0$ tel que $\pi$ soit l'image d'une représentation cuspidale $\pi'$ de $G(Y')$ par la correspondance de Howe. Kudla a aussi montré que la dimension de $Y'$ est telle que l'induite (pour $\chi_{Y_0,X}$ un caractère quadratique de $F^*$ explicite qui dépend de $Y_0$ et $X$) $\chi_{Y_0,X}|\,|^{(m^*-(n')^*+1)/2} \times \pi$ est réductible ($(n')^*$ est défini comme $n^*$). On vérifie que $\chi_{Y_0,X}$ n'est autre que $\eta_1$ ; en effet c'est le discriminant de la forme de $Y$ si $Y$ est orthogonal. Ainsi $x_{\eta_1} = (m^* - (n')^* + 1)/2$ et d'après ce que l'on a vu ci-dessus, cela entraîne que $\dim Y' = \dim Y$ d'où $Y' = Y$. Il résulte alors aussi des résultats de Kudla que $\pi'$ et $\pi_{\eta_1,a_1}$ se correspondent dans la correspondance de Howe pour la paire $G(Y) = G^-(n^-)$ et $G(n + a_1 + 1)$. Ainsi $\pi' \simeq \pi^- \otimes \chi_Y$ et on a la cuspidalité cherchée. Remarquons que l'on a aussi démontré au passage que $\pi$ et une tordue de $\pi^-$ se correspondent par la correspondance de Howe.

On définit maintenant $Quad'(\pi^-)$ comme on l'a fait pour $\pi$ et pour tout $\eta \in Quad'(\pi^-)$, on note $x_\eta^-$ le point où l'induite $\eta|\,|^{x_\eta^-} \times \pi^-$ est réductible.

**Lemme.** *Soit $\eta$ un caractère quadratique de $F^*$.*

(i) *Supposons que $\eta \neq \eta_1$, alors $\eta \in Quad'(\pi) \Leftrightarrow \eta \in Quad'(\pi^-)$ et alors $x_\eta = x_\eta^-$.*
(ii) *Supposons que $\eta = \eta_1$ ; alors $\eta_1 \in Quad'(\pi^-)$ si et seulement si $x_{\eta_1} > 3/2$ et alors $x_{\eta_1}^- = x_{\eta_1} - 1$.*
(iii) *Soit $\rho$ une représentation cuspidale autoduale, d'un groupe linéaire avec $\rho \notin Quad'(\pi)$ et soit $z \in \mathbb{R}$. Alors l'induite $\rho|\,|^z \times \pi$ est réductible si et seulement si l'induite $\rho|\,|^z \times \pi^-$ l'est.*

Ce lemme est conséquence des travaux de Kudla : soit $\rho$ une représentation cuspidale unitaire autoduale de $GL(d_\rho, F)$ et soit $z \in \mathbb{R}$. Si $\rho \neq \eta_1$, alors, dans la correspondance de Howe pour la paire $G(n + d_\rho), G^-(n^- + d_\rho)$ un sous-quotient de l'induite de $\rho|\,|^z \times \pi$ correspond à un sous-quotient de l'induite de $\chi_Y\rho|\,|^z \times \chi_Y \otimes \pi^-$ (cf. [8]). Les modules de Jacquet des sous-quotients en question ont même longueur (cf. [13], 4.2, qui reprend des résultats de Kudla), d'où la réductibilité de l'une des induites correspond à la réductibilité de l'autre induite. Cela démontre (i) et (iii). Quant à (ii) : on note $Y_1$ l'espace dans la tour de Witt de $Y$ auquel on a ajouté un plan isotrope. Il est directement démontré par Kudla que $\pi$ intervient dans la correspondance de Howe pour la paire $G(X), G(Y_1)$ et que son image, $\pi'$ est sous-quotient de l'induite $\eta_1|\,|^{((m^-)^*-m^*+1)/2}\times\pi$. Or $((m^-)^*-m^*+1)/2=(-2x_{\eta_1}+2)/2)=-x_{\eta_1}+1$. En outre $Jac_{\eta_1|\,|^{-x_{\eta_1}+1}}\pi'=0$ (puisque $\pi$ est cuspidale, c'est une conséquence immédiate de [8], théorème 2.1, qui utilise des résultats de Rallis) ; ainsi l'induite est réductible. Cela prouve (ii), en tenant compte de la définition de $Quad'$.

**Corollaire.** *La représentation $\pi^-$ vérifient les même hypothèses que $\pi$ : elle est cuspidale et*

$$\sum_{\eta\in Quad'(\pi^-)}\sum_{\ell\in[1,[x'_\eta]]}\left(2x'_\eta-2\ell+1\right)-\left(m^-\right)^*=\sum_{\eta\in Quad'(\pi)}\sum_{\ell\in[1,[x_\eta]]}(2x_\eta-2\ell+1)-m^*.$$

Par récurrence, on obtient le (i) et le (iii) du théorème. Pour le (ii) c'est un peu plus compliqué car il faut reprendre les constructions de [14]. La correspondance entre paramètres d'Arthur et front d'onde n'est simple que sous les hypothèses totalement de petit rang (ou que tous les blocs de Jordan, pour le paramètre d'Arthur correspondant, sont de taille distinctes) et cela n'est réalisé pour les cuspidales que si $|Quad(\pi)|=1$. C'est pour pallier à cela que l'on a introduit la représentation $\pi_{\{\eta,a_{\eta,j}\}}$ au début de la preuve.

Avec les données $a_{\eta,j}$ du début de la preuve, on définit $\pi^-\{\eta,a_{\eta,j}\}$ comme l'unique quotient irréductible :

$$\begin{array}{c}\displaystyle\bigtimes_{\eta\in Quad'(\pi)-\{\eta_1\}}\ \bigtimes_{j\in[[x_\eta]-1,0]}\ \bigtimes_{\ell\in[a_{\eta,j},0]}\eta|\,|^{x_\eta-j+\ell}\ \bigtimes_{j\in[[x_{\eta_1}]-1,1]}\ \bigtimes_{\ell\in[a_{\eta,j},0]}\eta|\,|^{x_\eta-j+\ell}\times\pi^-\\ \downarrow\\ \pi^-_{\{\eta,a_{\eta,j}\}}.\end{array}$$

La différence avec la définition de $\pi_{\{\eta,a_{\eta,j}\}}$ tient dans $\bigtimes_{j\in[[x_{\eta_1}]-1,1]}$ et non pas $\bigtimes_{j\in[[x_{\eta_1}]-1,0]}$ et, évidemment le remplacement de $\pi$ par $\pi^-$.

On montre que $\pi_{\eta,a_{\eta,j}}$ et $\chi_Y\pi^-_{\eta,a_{\eta,j}}$ se correspondent par la correspondance de Howe pour la bonne paire réductive duale (c'est le même caractère $\chi_Y$ que ci-dessus vu pour un groupe orthogonal plus gros). En plus comme $a_{\eta_1,0}$ est très grand par rapport aux autres $a_{\eta,j}$, on est dans le domaine du petit rang. Le front d'onde de $\pi_{\eta,a_{\eta,j}}$ se calcule donc en fonction de celui de $\pi^-_{\eta,a_{\eta,j}}$ d'après les formules données en [13], 3.4.2. Par récurrence, on admet que $\pi^-_{\eta,a_{\eta,j}}$ est totalement de petit rang et correspond à des paramètres d'Arthur dont les blocs de Jordan sont de la forme $(\eta,2x_\eta-2j+1+2a_{\eta,j},\sigma_{\eta,j})$, où $\sigma_{\eta,2x_\eta-2j+1}$ est convenable (déterminé par le front d'onde), où $\eta$ parcourt $Quad'(\pi^-)$ et où $j\in[[x_\eta],1]$ sauf si $\eta=\eta_1$ où $j>1$. Il résulte alors de [13], 3.4.2, que $\pi_{\{\eta,a_{\eta,j}\}}$ est totalement de petit rang. C'est donc une représentation quadratique unipotente stricte (cf. [14], remarque 3.3.2 et 3.3.5) et elle correspond aux paramètres d'Arthur ayant comme décomposition de Jordan les mêmes blocs que ci-dessus mais en acceptant $j=1$ quand $\eta=\eta_1$ ; le $\sigma_{\eta,2x_\eta-1}$ est déterminé par la forme du groupe orthogonal de la paire.

On a essentiellement terminé : il faut maintenant redescendre de $\pi_{\{\eta,a_{\eta,j}\}}$ à $\pi$. Du point de vue paramétrisation, cela revient à considérer les blocs de Jordan $(\eta,2x_\eta-2j+1,\sigma_{\eta,2x_\eta-2j+1})$ au lieu de $(\eta,2x_\eta-2j+1+2a_{\eta,j},\sigma_{\eta,2x_\eta-2j+1})$ (comme expliqué en [14], p. 287). On note $\pi'$ la représentation quadratique unipotente stricte associée aux blocs de Jordan $(\eta, 2x_\eta - 2j + 1, \sigma_{\eta,2x_\eta-2j+1})$ dans [14], 5.2. On définit $\pi'_{\{\eta,a_{\eta,j}\}}$ comme on l'a fait pour $\pi_{\eta,a_{\eta,j}}$, mais là il faut utiliser les construction de loc. cit. parce que l'unicité du quotient irréductible est loin d'être claire si l'on ne démontre pas la cuspidalité de $\pi'$. On veut démontrer que $\pi' \simeq \pi$ ; par récurrence, on admet que $\pi^-$ est quadratique unipotente stricte et correspond aux blocs de Jordan $(\eta, 2x_\eta - 2j + 1, \sigma_{\eta,2x_\eta-2j+1})$ (en excluant $j = 1$ si $\eta = \eta_1$). C'est la construction même de [14], 5.2, qui dit que $\pi'_{\{\eta,a_{\eta,j}\}}$ et $\pi_{\{\eta,a_{\eta,j}\}}$ ont même front d'onde ; ces 2 représentations étant totalement de petit rang sont isomorphes ([14], 3.3.4 et remarque de 3.3.2). En considérant les supports cuspidaux de ces 2 représentations, on trouve bien l'isomorphisme cherché, $\pi \simeq \pi'$ et la paramétrisation d'Arthur de $\pi$.

### 5.5. *Preuve de la proposition* (i)

On fera la comparaison avec les travaux de Lusztig (i.e., le (ii) de la proposition) plus généralement plus loin. On montre ici que la cuspidalité de $\pi$ entraîne que $\sigma_{\eta,2x_\eta-2j-1} \neq \sigma_{\eta,2x_\eta-2j-3}$ si $\eta \in Quad(\pi)$ et $j < [x_\eta] - 1$. Par récurrence, on admet le résultat pour $\pi^-$ ; cela donne déjà le résultat annoncé sauf éventuellement pour $\eta = \eta_1$ et $j = 0$. Si $Quad(\pi)$ a plus d'un élément, en changeant $\eta_1$, on obtient le résultat en toute généralité. On suppose donc que $Quad(\pi)$ est réduit à 1 élément que l'on note simplement $\eta$.

Supposons d'abord que $G(n)$ est un groupe symplectique ; puisque $\pi$ est l'image de $\chi_Y \otimes \pi^-$ et est cuspidale, d'après le résultat de Kudla [8], $\chi_Y \otimes \pi^-$ n'est pas une image dans une correspondance de Howe faisant intervenir un groupe dans la même tour de Witt que $G(n)$ mais sur un espace de dimension strictement plus petite (c'est à dire un groupe du type $G(n - r)$ avec $r > 0$). D'après ce que l'on a dit ci-dessus, $\pi^-$ est une représentation d'un groupe orthogonal avec une forme de discriminant $\eta_q = \eta$ et d'invariant de Hasse $\varepsilon_q = \sigma_{\eta,2x_\eta-1}$ ($\chi_Y = \chi_q$, évidemment). Comme $Quad(\pi^-)$ est aussi réduit à 1 élément, le paramètre d'Arthur de $\pi^-$ est de la forme $(\eta, 2x_\eta - 3, \sigma_{\eta,2x_\eta-3})$, $(\eta, 2x_\eta - 5, \sigma_{\eta,2x_\eta-5}), \dots, (\eta, 1, \sigma_{\eta,1})$ (le cas $x_\eta = 1$ ne peut arriver car on aurait $n = 0$ par l'inégalité (*)) ; cela montre que le groupe orthogonal est le groupe orthogonal d'une forme de dimension au moins 4. En appliquant alors à $\pi^-$ la même procédure, on voit que $\pi^- \otimes \chi_{1,\sigma_{\eta,0}\sigma_{\eta,1}}$ est l'image d'une représentation de $G(n - 2x_\eta - 2)$. D'après ce que l'on vient de dire, cela nécessite que le caractère soit non trivial, c'est-à-dire $\sigma_{\eta,2x_\eta-1} \neq \sigma_{\eta,2x_\eta-3}$ comme annoncé.

Si $G(n)$ est un groupe orthogonal pair, c'est exactement la même démonstration. On va considérer le cas des groupes orthogonaux impairs et métaplectiques, en montrant que pour tout $\eta \in Quad(\pi)$, $\sigma_{\eta,2} = -1$. Cette dernière propriété se démontre aussi par récurrence si $|Quad(\pi)| > 1$ ou si $Quad(\pi)$ n'a qu'un élément noté $\eta$ mais avec $x_\eta > 3/2$ (c'est-à-dire où il y a plus d'un bloc de Jordan : en effet quand on passe de $\pi$ à $\pi^-$ on ne perturbe pas $\sigma_{\eta,2}$ d'après les formules données en 5.2. Il reste donc le cas où $\pi$ appartient à un paquet avec un paramètre $\psi$ n'ayant qu'un bloc de Jordan. Ce bloc est donc de la forme $(\eta, 2, \sigma_2)$ (nécessairement $n = 1$ d'après la paramétrisation décrite). Si $G(n)$ est une forme de $SO(3)$, par construction $\sigma_2$ est l'invariant de Hasse de la forme orthogonale et il faut donc démontrer que $G(n)$ est une forme compacte en utilisant l'hypothèse que $\pi$ est cuspidale. Or le front d'onde de $\pi$ doit être formé d'une orbite unipotente incluse dans l'orbite duale de l'orbite régulière de $SL(2, \mathbb{C}) = G^*(n)$ ; cette orbite duale est l'orbite triviale. Or, comme $\pi$ est cuspidale son front d'onde ne rencontre aucun sous-groupe de Levi propre de $G(n)$ (cf. [12], 2.8, corollaire). Ceci n'est possible avec l'orbite triviale que si le groupe est compact. Supposons maintenant que $G(n)$ est le groupe métaplectique, $Mp(2, F)$, revêtement de $SL(2, F)$. L'orbite duale est ici l'orbite régulière de Lie $Mp(2, \overline{F})$. (cf. les formules de [12], 3.1, pour l'orbite notée $\tilde{U}^*$). Le fait que $\pi$ soit cuspidale se traduit par le fait que $\pi$ peut se construire à partir d'un caractère non trivial du groupe $O(1)$ correspondant à la forme quadratique $\eta x^2$ (le $\eta$ est indispensable pour la correspondance de Howe pas pour le groupe, évidemment). D'où encore le résultat par la construction de la bijection ([12], 2.8).

### 5.6. Caractérisation des séries discrètes quadratiques unipotentes

En 5.3, on a défini les séries discrètes quadratiques unipotentes. A une telle série discrète, $\pi$, on sait donc associer un couple $(\psi_\pi, \sigma_\pi)$ comme en 5.2 en prenant celui associé à $\mathrm{inv}(\pi)$, où inv est l'involution ; il faut évidemment que cette construction satisfasse aux propriétés des paramètres rappelées en 4. On a défini $Jord(\pi)$ et pour un paramètre $\psi$ on a aussi défini un ensemble de blocs de Jordan qui vient de la décomposition en sous-représentations irréductibles de $W_F \times SL(2, \mathbb{C})$ (cf. 5.2) que l'on note $Jord(\psi)$. Il est clair que $Jord(\psi)$ détermine uniquement $\psi$ à conjugaison près. On dit que $\psi$ correspond à $Jord(\pi)$ si $Jord(\pi) = Jord(\psi)$.

**Théorème.**

(i) *Soit $\pi$ une série discrète quadratique unipotente, alors $\psi_\pi$ est le morphisme associé à $Jord(\pi)$ et $\sigma_\pi$ vérifie les propriétés souhaitées* (*cf.* 4) ; *ceci permet de définir complètement $\varepsilon_\pi$ en l'identifiant à $\sigma_\pi$.*

(ii) *On suppose ici que $G(n)$ n'est pas métaplectique. Soit $\pi$ une série discrète de $G(n)$ ; alors $\pi$ est quadratique unipotente si et seulement si l'inégalité ci-dessous est satisfaite pour ses blocs de Jordan* :

$$\sum_{(\rho,a)\in Jord(\pi);\ d_\rho=1} a \geqslant m^*.$$

*On a alors l'égalité et* $\forall(\rho, a) \in Jord(\pi)$, $d_\rho = 1$.

Dans la preuve, $\pi$ n'est pas une série discrète mais l'image par l'involution d'une série discrète. Les blocs de Jordan se définissent alors en remplaçant $St(\rho, a)$ par $Sp(\rho, a)$ où $Sp$ est le module de Speh, c'est-à-dire l'unique quotient irréductible de $\rho|\,|^{(a-1)/2} \times \cdots \times \rho|\,|^{-(a-1)/2}$.

(i) Supposons que $\pi$ est quadratique unipotente et montrons que $(\psi_\pi, \sigma_\pi)$ a les propriétés annoncées. On écrit $(\eta_i, P_i, \sigma_i)_{i\in[1,t]}$ la décomposition de Jordan de $(\psi_\pi, \sigma_\pi)$. On a expliqué en 5.2 comment on peut définir $\pi^-$ quadratique unipotent avec un lien entre $\pi$ et $\pi^-$ donné par une correspondance de Howe ; pour cela on utilise un bloc de Jordan, noté par exemple, $(\eta_1, P_1, \sigma_1)$ qui doit avoir la propriété que $P_1 > P_i$ si $i > 1$ et $\eta_i = \eta_1$. Grâce à cela, on montre :

**Lemme.** *Il existe $n_{\text{cusp}} \leqslant n$ et $\pi_{\text{cusp}}$ une représentation cuspidale quadratique unipotente de $G(n_{\text{cusp}})$ et une collection $\mathcal{C}$ de caractères, non nécessairement distincts, de la forme $\eta|\,|^z$ avec $\eta$ caractère quadratique de $F^*$ et $z$ demi-entiers (i.e., $\in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$) tel que $\pi$ soit un sous-quotient de l'induite $\bigtimes_{(\eta,z)\in\mathcal{C}} \eta|\,|^z \times \pi_{\text{cusp}}$. Et si $(\eta_i, P_i)_{i\in[1,t]}$ est la décomposition de Jordan de $\psi_\pi$ alors que $(\eta_{\text{cusp},j}, P_{\text{cusp},j})_{j\in[1,t_{\text{cusp}}]}$ est celle de $\psi_{\pi_{\text{cusp}}}$, on a l'égalité d'ensemble avec multiplicité* :

$$\begin{aligned}
&\bigcup_{(\eta,z)\in\mathcal{C}} \eta|\,|^z \bigcup \bigcup_{(\eta,z)\in\mathcal{C}} \eta|\,|^{-z} \bigcup_{j\in[1,t_{\text{cusp}}]} \bigcup_{\ell\in[-(P_{\text{cusp},j}-1)/2,(P_{\text{cusp},j}-1)/2]} \eta|\,|^\ell \\
&\quad = \bigcup_{j\in[1,t]} \bigcup_{\ell\in[-(P_j-1)/2,(P_j-1)/2]} \eta|\,|^\ell.
\end{aligned}$$

Cela se démontre par récurrence avec la correspondance de Howe en utilisant les résultats de Kudla [8] qui exactement comparent les supports cuspidaux.

Ce lemme a pour conséquence que la décomposition de Jordan de $\psi_\pi$ donne les blocs de Jordan de $\pi$. En effet, si $G(n)$ n'est pas un groupe métaplectique, on utilise la proposition de 4.3 qui dit immédiatement que $Jord(\psi_\pi) = Jord(\pi)$.

On traite le cas des groupes métaplectiques à partir des groupes orthogonaux impairs (comme dans Adams–Barbasch). On fixe $\pi$ une représentation quadratique unipotente stricte et $\eta$ un caractère quadratique. On fixe $Y_0$ l'espace orthogonal de dimension 1 de la forme quadratique $\eta x^2$. On note $Y$ l'espace de dimension minimale dans la tour de Witt de $Y_0$ tel que $\pi$ ait une image dans la correspondance de Howe entre $G(n)$ et $G(Y)$. On a calculé en [14] l'image, $\pi^Y$, de $\pi$ dans ce cas ; elle est de la forme $\pi^+$ (on ajoute un bloc de Jordan) ou $\pi^-$ (on retranche un bloc de Jordan) cela dépend de la décomposition de Jordan de $\psi_\pi$, on n'a pas besoin des détails, le seul point qui nous intéresse et que $\pi^Y$ est aussi quadratique unipotente stricte. On note $\pi' := \chi_Y \pi^Y$, la torsion a été justifiée pour avoir une bonne correspondance des supports cuspidaux. Les blocs de Jordan de $\psi_\pi$ et de $\psi_{\pi'}$ qui ne sont pas de la forme $(\rho, P, \sigma)$ avec $\rho \simeq \eta$ coïncident. On a définit $\mathcal{S}(\pi)$ en 4.2 et on vérifie de même que

$$\bigl\{(\rho, z) \in \mathcal{S}(\pi);\ \rho \not\simeq \eta\bigr\} = \bigl\{(\rho, z) \in \mathcal{S}\bigl(\pi'\bigr);\ \rho \not\simeq \eta\bigr\}.$$

De plus si $\rho \not\simeq \eta$ et si $a \in \mathbb{N}$, l'irréductibilité de $Sp(\rho, a) \times \pi$ est équivalente à celle de $Sp(\rho, a) \times \pi^Y$. Comme on a le choix de $\eta$, on obtient l'analogue de la proposition de 4.2 pour $\pi$ à partir de la proposition pour les différents $\pi'$ quand $\eta$ varie.

Il faut maintenant montrer les propriétés de $\sigma_\pi$. Avec les résultats de Kudla (cf. [13], 4.2.1(i)) on a les équivalences, si $\rho \neq \eta_1$ et pour $a, k$ des entiers fixés :

$$\begin{aligned}
&\exists \pi' | \pi \hookrightarrow \rho|\,|^{-(a-1)/2} \times \cdots \times \rho|\,|^{-(a-1)/2+k} \times \pi' \\
&\quad \Leftrightarrow \quad \exists \pi'' | \pi^- \hookrightarrow \rho|\,|^{-(a-1)/2} \times \cdots \times \rho|\,|^{-(a-1)/2+k} \times \pi''.
\end{aligned}$$

Ceci reste aussi vrai si $\rho \simeq \eta_1$ mais il faut alors $a < P_1$.

Par récurrence, on en déduit les propriétés de $\sigma_\pi$ sauf celles qui font intervenir $\sigma_{\eta_1, P_1}$. Pour avoir cette dernière propriété, il n'y a rien à démontrer si $\eta_i \neq \eta_1$ pour tout $i > 1$ et si $P_1$ est impair. Dans les autres cas, on suppose que $\eta_2 = \eta_1$ et on suppose que $P_2$ est le maximum des $P_i$ tel que $\eta_i = \eta_1$ et $i > 1$ (quitte à prendre $P_2 = 0$). Notons $G(n')$ avec $n' \leqslant n$, le groupe d'un espace de la tour de Witt associée à $G(n)$ qui voit la première occurrence de $\pi^-$ (ou plutôt de son tordu par le caractère fixé comme expliqué) dans la correspondance de Howe. On vérifie, en construisant $(\pi^-)^-$, que $\sigma_{\eta_1,P_1} = \sigma_{\eta_2,P_2}$ (avec la convention $\sigma_{\eta_2,0} = 1$ si nécessaire) exactement quand $(m')^* = (m^-)^* - P_2$, avec les notations usuelles. On a démontré aussi (cette fois avec la construction de $(\pi^-)^+$ de [14]) que si $\sigma_{\eta_1,P_1} \neq \sigma_{\eta_2,P_2}$ alors $(m')^* \leqslant (m^-)^* + P_2 + 2$. On a une inégalité de Rallis, qui compare la première occurrence d'une représentation et de sa tordue par le caractère signe (ou dans un tour de Witt avec espace orthogonal et la tour ou l'on change l'invariant de Hasse). Elle montre que le $\leqslant$ ci-dessus est en fait une égalité, c'est-à-dire que si $\sigma_{\eta_1,P_1} \neq \sigma_{\eta_2,P_2}$ alors $(m')^* = (m^-)^* + P_2 + 2$. La conséquence est que la tordue fixée de $\pi^-$ n'a pas d'image dans la correspondance pour la paire $G(n - (P_1 - P_2)/2), G^-(n^-)$ si $\sigma_{\eta_1,P_1} \neq \sigma_{\eta_2,P_2}$ : en effet l'analogue de $m^*$ pour $n - (P_1 - P_2)/2$ est $m^* - (P_1 - P_2)$. Or $m^* - (m^-)^* = P_1$ d'où $m^* - (P_1 - P_2) - (m^-)^* = P_2$ et si l'image existe, $(m')^* - (m^-)^* \leqslant P_2$. D'autre part, par une action répétée de [13], 4.2.1(ii), on voit que s'il existe $\pi'$ et une inclusion de $\pi$ dans l'induite $\eta_1|\,|^{-(P_1-1)/2} \times \cdots \times \eta_1|\,|^{-(P_2+1)/2} \times \pi'$ alors $\pi'$ est l'image du tordu fixé de $\pi^-$ dans la correspondance pour la paire $G(n-(P_1-P_2)/2), G^-(n^-)$. Ainsi la non nullité du module de Jacquet entraîne que $\sigma_{\eta_1,P_1} = \sigma_{\eta_2,P_2}$. Supposons, réciproquement que $\sigma_{\eta_1,P_1} = \sigma_{\eta_2,P_2}$, on sait que le tordu de $\pi^-$ intervient avec la paire $G(n - (P_1 - P_2)/2), G^-(n^-)$. On note $\pi'$ son image. C'est la filtration de Kudla (cf., par exemple, [13], 4.2) qui montre que $\pi$ est quotient de la représentation $\eta_1|\,|^{(P_1-1)/2} \times \cdots \times \eta_1|\,|^{(P_2+1)/2} \times \pi'$. Cela termine la preuve de (i).

(ii) Soit $\pi$ une série discrète satisfaisant à l'inégalité de l'énoncé. Le fait que l'inégalité soit une égalité et que pour tout $(\rho, a) \in Jord(\pi)$ $d_\rho = 1$ résulte de l'inégalité dans l'autre sens du corollaire de 4.2. D'après ce même corollaire, $\pi_{\mathrm{cusp}}$ vérifie aussi l'analogue de l'inégalité de l'énoncé. Ainsi, avec le théorème de 5.1, on sait que $\pi_{\mathrm{cusp}}$ est une représentation quadratique unipotente. On a calculé $Jord(\pi)$ grâce à la proposition de 4.2 et cela permet d'associer à $\pi$ un morphisme, $\psi_\pi$, de $W_F \times SL(2,\mathbb{C})$ dans $G^*(n)$ qui satisfait aux propriétés de [15]. Comme dans [15], rappelé en 4, on associe aussi à $\pi$ un morphisme $\varepsilon_\pi$ de $Jord(\pi)$ dans $\{\pm 1\}$ partiellement défini, grâce aux propriétés des modules de Jacquet de $\pi$. Pour pouvoir utiliser la propriété d'injectivité de l'application $\pi \mapsto (\psi_\pi, \varepsilon_\pi)$ il faut que $\varepsilon_\pi$ soit aussi défini sur les couples $(\rho, a) \in Jord(\pi)$ tel que $a$ soit impair et $\forall b \in \mathbb{N}, (\rho, b) \notin Jord(\pi_{\mathrm{cusp}})$ (cf. [15], 7). On a expliqué en loc. cit. qu'il y a là un choix qui repose sur la distinction (arbitraire) des 2 sous-modules de l'induite $\rho \times \pi_{\mathrm{cusp}}$ (cette induite est réductible : comme il existe $a$ impair avec $(\rho, a) \in Jord(\pi)$ le point de réductibilité pour l'induite $\rho|\,|^x \times \pi$ est $x_\rho$ avec $2x_\rho - 1$ impair et donc par définition de $(\rho, 1) \notin Jord(\pi_{\mathrm{cusp}})$ l'induite est réductible). Peu importe le choix, l'injectivité suffit pour compter les séries discrètes ayant $\pi_{\mathrm{cusp}}$ comme support cuspidal partiel fixé et $Jord(\pi)$ comme bloc de Jordan. Il n'est quand même pas simple de calculer effectivement ce nombre (les difficultés viennent de ce que l'on fixe $\pi_{\mathrm{cusp}}$), on procède par étape. La remarque suivante complète en fait (i).

**Remarque.** Ici $G(n)$ peut être métaplectique. Soit $\pi$ une représentation quadratique unipotente stricte ou une série discrète quadratique unipotente, à laquelle on a associé le couple $(\psi_\pi, \sigma_\pi)$ formé d'un morphisme de $W_F \times SL(2,\mathbb{C})$ dans $G^*(n)$ et d'un caractère du centralisateur de ce morphisme. On note $\pi_{\text{cusp}}$ le support cuspidal partiel de $\pi$ et $(\psi_{\text{cusp}}, \sigma_{\text{cusp}})$ les paramètres d'Arthur qui lui sont associés. On a les compatibilités suivantes :

(i) Soient $\eta, a, a'$ tels que $(\eta, a) \in \mathit{Jord}(\pi)$, $(\eta, a') \in \mathit{Jord}(\pi)$, $a > a'$ et pour tout $b \in ]a, a'[$ $(\eta, b) \notin \mathit{Jord}(\pi)$. On définit $(\psi', \sigma')$ en enlevant de $\mathit{Jord}(\pi)$ les 2 blocs $(\eta, a)$ et $(\eta, a')$ pour définir $\psi'$ et en notant $\sigma'$ la restriction de $\sigma_\pi$. Ces paramètres correspondant à une représentation $\pi'$ de même type que $\pi$, on définit donc aussi $(\psi'_{\text{cusp}}, \sigma'_{\text{cusp}})$ et on a l'égalité, à conjugaison près (bien sûr) : $(\psi'_{\text{cusp}}, \sigma'_{\text{cusp}}) = (\psi_{\text{cusp}}, \sigma_{\text{cusp}})$.

(ii) Soient $\eta, a$ tels que $(\eta, a) \in \mathit{Jord}(\pi)$, $a \geqslant 3$ et $(\eta, a-2) \notin \mathit{Jord}(\pi)$ ; on définit $(\psi', \sigma')$ en remplaçant simplement le bloc $(\eta, a)$ par le bloc $(\eta, a-2)$. Alors on a comme ci-dessus (avec les mêmes notations) : $(\psi'_{\text{cusp}}, \sigma'_{\text{cusp}}) = (\psi_{\text{cusp}}, \sigma_{\text{cusp}})$.

Il suffit de faire la preuve pour $\pi$ quadratique unipotente stricte. On a déjà introduit $\pi^-$ dont on connait bien les paramètres ; on a enlevé un bloc de Jordan que l'on note $(\eta_1, P_1, \sigma_1)$. Par les résultats généraux de Kudla, on sait que $\pi_{\text{cusp}}$ et $\pi^-_{\text{cusp}}$ se correspondent par une correspondance de Howe convenable (les tours de Witt de chacun des espaces étant fixées). Il n'y a aucune difficulté à démontrer le lemme par récurrence à partir de $\pi^-$ si $(\eta, a) \neq (\eta_1, P_1)$. Supposons donc que $(\eta, a) = (\eta_1, P_1)$. Prouvons (i) sous cette hypothèse. On écrit le $(\rho, a')$ de l'énoncé sous la forme $(\eta_1, P')$ et c'est le plus grand bloc de Jordan de $\pi^-$ relatif à $\eta_1$. En particulier $\pi^-$ provient de $\pi'$, le $\pi'$ de l'énoncé, pour la bonne correspondance de Howe et $\pi$ et $\pi'$ sont dans la même tour (c'est l'hypothèse que $\sigma_\pi(\eta_1, P_1) = \sigma_\pi(\eta_1, P')$). Ils ont donc même support cuspidal partiel. La preuve de (ii) est encore plus simple, avec l'hypothèse que $(\eta_1, P_1 - 2) \notin \mathit{Jord}(\psi_\pi)$, on sait que $(\eta_1, P_1 - 2)$ est strictement plus grand que le plus grand des blocs de Jordan de $\pi^-$ relatif à $\eta_1$. Ainsi, $\pi^-$ a $\pi'$ (le $\pi'$ correspondant au paramètre $(\psi', \sigma')$ de l'énoncé) pour image dans la correspondance de Howe entre $G^-(n^-)$ et $G(n-1)$. Et $\pi$ et $\pi'$ sont encore dans la même tour et ont même support cuspidal partiel. Cela termine la preuve de la remarque.

Cette remarque termine la preuve du (ii) du théorème puisqu'elle montre que les paramètres pour les séries discrètes quadratiques unipotentes avec $\mathit{Jord}(\pi)$ et $\pi_{\text{cusp}}$ fixés sont les mêmes que les paramètres pour les séries discrètes avec les mêmes ensembles fixés.

## 6. Comparaison avec les constructions de Lusztig

En [9], Lusztig a construit une bijection entre l'ensemble des classes de conjugaison de couples $(\psi, \sigma)$ où $\psi$ est un morphisme algébrique de $W_F \times SL(2,\mathbb{C})$ dans $Sp(2n,\mathbb{C})$ dont la restriction à $W_F$ est triviale sur le noyau du caractère quadratique non ramifié de $F^*$, identifié à un caractère de $W_F$ (en d'autres termes est non ramifié) et $\sigma$ est un caractère du centralisateur de $\psi$ et un certain ensemble de représentations des 2 formes, déployée et non déployée, de $SO(2n+1, F)$. Ceci est précisé en [23]. On dit que $(\psi, \sigma)$

est discret si l'image de $\psi$ n'est pas incluse dans un sous-groupe de Levi de $Sp(2n, \mathbb{C})$. En particulier il est montré en loc. cit. que si $(\psi, \sigma)$ est discret alors l'image par l'involution de la représentation construite par Lusztig est une série discrète. On va montrer le théorème :

**Théorème.** *Pour les groupes orthogonaux impairs, les séries discrètes construites par la méthode de Lusztig sont précisément les séries discrètes quadratiques unipotentes, $\pi$, telles que $\forall(\rho, a) \in Jord(\pi)$, $\rho$ est l'un des 2 caractères quadratiques non ramifiés de $W_F$. De plus la paramétrisation de Lusztig et celle considérée ici, grâce au front d'onde, coïncident.*

On traite séparément le cas cuspidal.

### 6.1. Le cas cuspidal

En ce qui concerne les représentations cuspidales construites par Lusztig (repris en [23], 4.1, 1.11 qui ramènent à 1.10), elles sont associées aux mêmes morphismes de $W_F \times SL(2, \mathbb{C}) \to Sp(2n, \mathbb{C})$ et aux mêmes caractères du centralisateur de ces morphismes qu'ici. Les blocs de Jordan de $\psi$ sont $2k^{\pm}, 2(k^{\pm} - 1), \ldots, 2$ avec les notations de loc. cit qui correspondent avec nos notations à $(\eta_{\pm}, 2k^{\pm}), (\eta_{\pm}, 2(k^{\pm} - 1)), \ldots, (\eta_{\pm}, 2)$ où $\eta_+$ est le caractère trivial et $\eta_-$ le caractère non trivial non ramifié et quadratique de $F^*$. (On peut avoir $k^+$ où $k^-$ nul et il n'y a alors pas de bloc $(?, 2)$.) On a : $2n = k^+(k^+ + 1) + k^-(k^- + 1)$. On fixe $k^+$ et $k^-$ et notons $\pi$ la représentation cuspidale que Lusztig associe à $k^+, k^-$ ; montrons qu'elle vérifie $x_{\eta_{\pm}} = k^{\pm} + 1/2$ ; ici $x_{\eta_{\pm}}$ est le point de réductibilité $\geqslant 0$, pour l'induite $\eta_{\pm}|\,|^x \times \pi$. Pour démontrer cela, on fixe un signe $\zeta$ et on suppose que $k^{\zeta} \neq 0$. On considère dans $SO(2n + 3, F)$ (la forme convenable, c'est-à-dire la même que celle qui admet $\pi$ comme représentation) le support cuspidal $\eta_{\pm}|\,|^{k^{\zeta}+1/2} \otimes \pi$ ; il y a une série discrète qui le possède (cf. [23], 4.1 et 4.2). Cela force $x_{\eta_{\zeta}} = k^{\zeta} + 1/2$. On remarque que pour $k$ un entier impair $k(k + 1)$ est la somme des nombres impairs qui lui sont inférieurs ou égaux. Ainsi les hypothèses du théorème 5 sont satisfaites et $\pi$ est une représentation quadratique unipotente. On a calculé son paramètre en fonction de $x_{\eta_{\pm}}$ avec la proposition qui suit le théorème et c'est bien le même paramètre que celui de Lusztig.

### 6.2. Le cas d'une série discrète générale

On fixe $(\psi, \sigma)$ un paramètres discret avec la condition que le noyau de $\psi_{|W_F}$ contient le noyau du caractère non ramifié non trivial. On note $\pi(\psi, \sigma)$ la série discrète quadratique unipotente que nous avons associée à ce paramètre et $\pi_L(\psi, \sigma)$ celle que Lusztig lui a associée. Nous avons montré que $Jord(\pi(\psi, \sigma))$ était les blocs de Jordan de la décomposition en irréductible de $\psi$ et cet ensemble a donc les propriétés de l'énoncé. La seule chose à démontrer est donc que $\pi(\psi, \sigma) \simeq \pi_L(\psi, \sigma)$. Waldspurger a montré (cf. appendice) que $\sigma$ est lié au module de Jacquet de $\pi_L(\psi, \sigma)$ avec les conditions de [15] rappelées en 4. Ici on n'a pas de difficultés pour utiliser l'injectivité de [15], 7 : en effet si $(\rho, a)$ est dans $Jord(\psi)$ alors $a$ est pair. On n'a donc pas à faire de choix (cf. la preuve du théorème de 5.6). Ainsi la seule chose à montrer pour avoir l'isomorphisme est que le support cuspidal partiel de $\pi(\psi, \sigma)$ et celui de $\pi_L(\psi, \sigma)$ coïncident. Soit $(\psi_{\mathrm{cusp}}, \sigma_{\mathrm{cusp}})$ le paramètre du support cuspidal partiel de $\pi(\psi,\sigma)$. La remarque de 5.6, calcule ce paramètre uniquement en fonction de $(\psi,\sigma)$. Grâce au cas cuspidal déjà traité, il reste à vérifier que le support cuspidal partiel de $\pi_L(\psi,\sigma)$ a son paramètre qui se calcule en fonction de $(\psi,\sigma)$ de façon similaire. Il suffit donc encore de vérifier que la construction de Lusztig satisfait à la remarque de 5.6. Montrons cela : ce sont des propriétés de la correspondance de Springer généralisée (cf. [16], 0.6, mais une meilleur référence est [26], chapitre 11.3, car les notations coïncident presque ; la seule différence notable est que les éléments de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ y sont notés $\{0,1\}$ et non $\{\pm 1\}$). Cela termine la preuve.

## 7. Appendice (par Jean-Loup Waldspurger)

*7.1.* Soit $\mathbf{G}$ l'une des deux formes du groupe $\mathbf{SO}(2n+1)$ sur $F$. Soit $\pi$ une représentation irréductible de $G := \mathbf{G}(F)$, de la série discrète et de réduction unipotente. On la paramétrise par un quintuplet $(O, m^+, \varepsilon^+, m^-, \varepsilon^-)$, où $O$ est une orbite unipotente de $Sp(2n,\mathbb{C})$, $m^+, m^-$ sont des fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que pour tout $a \in \mathbb{N}$, $m^+(a) + m^-(a)$ est la multiplicité de $a$ en tant que bloc de Jordan de l'orbite $O$ et $\varepsilon^{\pm}$ sont des fonctions de $\{a \in \mathbb{N} \mid \pm m^{\pm}(a) \neq 0\}$ dans $\{\pm 1\}$ ; on a $m^{\pm}(a) \leqslant 1$ pour tout $a$. A un tel quintuplet, on associe un couple $(\psi,\sigma)$ formé d'un morphisme $\psi$ de $W_F \times SL(2,\mathbb{C})$ dans $Sp(2n,\mathbb{C})$ et un caractère, $\sigma$, du centralisateur de ce morphisme, en notant $\eta^+$ (respectivement $\eta^-$) le caractère quadratique non ramifié trivial (respectivement non trivial) de $W_F$, et en imposant à $(\psi,\sigma)$ d'avoir comme décomposition en irréductibles

$$\bigl\{\bigl(\eta^+, a, \varepsilon^+(a)\bigr);\ a \mid m^+(a) = 1\bigr\} \cup \bigl\{\bigl(\eta^-, a, \varepsilon^-(a)\bigr);\ a \mid m^-(a) = 1\bigr\}.$$

La représentation $\pi$ est une représentation de la forme déployée si et seulement si

$$\prod_{a \mid m^+(a)=1} \varepsilon^+(a) \prod_{a \mid m^-(a)=1} \varepsilon^-(a) = 1.$$

Fixons un signe $\zeta$ et un entier $a \geqslant 1$ tel que $m^{\zeta}(a) \neq 0$. Considérons l'ensemble des entiers $i$ tels que $1 \leqslant i < a$ et $m^{\zeta}(i) \neq 0$. S'il est non vide, on note $a_-$ son plus grand élément. S'il est vide, on pose $a_- = 0$ et, par convention, $\varepsilon^{\zeta}(a_-) = 1$.

Dans le cas particulier où $2n = a - a_-$ et $G$ est non déployé, nécessairement $a_- = 0$ et $\varepsilon^{\zeta}(a) = -1$ ; on exclut ce cas (où la proposition ci-dessous est vide). On peut donc fixer un sous-groupe parabolique $\mathbf{Q} = \mathbf{LN}$ de $\mathbf{G}$ tel que $\mathbf{L} = \mathbf{GL}(1)^{(a-a_-)/2} \times \mathbf{G}'$, où $\mathbf{G}'$ est un groupe $\mathbf{SO}(2n - a + a_- + 1)$.

**Proposition.** *On a l'égalité $\varepsilon^{\zeta}(a) = \varepsilon^{\zeta}(a_-)$ si et seulement si le module de Jacquet $\pi_Q$ contient un sous-quotient irréductible de la forme* : $\eta^{\zeta}|\,|^{(a-1)/2} \otimes \cdots \otimes \eta^{\zeta}|\,|^{(a_-+1)/2} \otimes \pi'$, *où $\pi'$ est une représentation de $G'$.*

**Remarque.** Dans cet énoncé, on peut aussi bien remplacer « sous-quotient » par quotient ou par sous-module.

*7.2.* Soit $\zeta$ un signe. Posons $n^\zeta := (1/2)\sum_{i\geqslant 1} i\, m^\zeta(i)$, $\widehat{G}^\zeta = Sp(2n^\zeta, \mathbb{C})$ et notons $\hat{\mathfrak{g}}^\zeta$ l'algèbre de Lie de $\widehat{G}^\zeta$. Soit $y^\zeta$ un élément nilpotent de $\hat{\mathfrak{g}}^\zeta$ dont les blocs de Jordan sont les $a \in \mathbb{N} \mid m^\zeta(a) = 1$. Posons $r_0 = (1/2)\log(q)$ et soit $\sigma^\zeta$ un élément semi-simple de $\widehat{V}$ tel que $[\sigma^\zeta, y^\zeta] = 2r_0 y^\zeta$. Notons $Z_{\widehat{G}^\zeta}(\sigma^\zeta, y^\zeta)$ le commutant commun de $\sigma^\zeta$ et $y^\zeta$ dans $\widehat{G}^\zeta$ ; le quotient, $\overline{A}(\sigma, y)$, de ce groupe par sa composante neutre est isomorphe à $\{\pm 1\}^{|\{i\geqslant 1;\ m^\zeta(i)=1\}|}$ et la fonction $\varepsilon^\zeta$ s'identifie à un caractère de ce groupe. Au quadruplet $(\sigma^\zeta, r_0, y^\zeta, \varepsilon^\zeta)$, on a associé en [23], 1.8 :

- deux entiers $k^\zeta, N^\zeta \geqslant 0$ tels que $N^\zeta = n^\zeta - k^\zeta(k^\zeta + 1)/2$ ;
- une $\mathbb{C}$-algèbre $\overline{\mathcal{H}}^\zeta = \overline{\mathcal{H}}(N^\zeta; 2k^\zeta + 1)$ ;
- un $\overline{\mathcal{H}}^\zeta$-module $E^\zeta = \mathbb{P}(\sigma^\zeta, r_0, y^\zeta, \varepsilon^\zeta)$.

L'algèbre $\overline{\mathcal{H}}^\zeta$ contient une sous-algèbre $\mathcal{S}^\zeta$ isomorphe à l'algèbre des polynômes sur $\mathbb{C}^{N^\zeta} \oplus \mathbb{C}$. A tout élément $(s, r)$ de cet espace est associé un homomorphisme d'évaluation $\ell_{s,r} : \mathcal{S}^\zeta \to \mathbb{C}$. On note $\mathrm{Exp}(E^\zeta)$ l'ensemble des $(s, r) \in \mathbb{C}^{N^\zeta} \oplus \mathbb{C}$ tels que $\mathbb{C} \otimes_{\mathcal{S}^\zeta, \ell_{s,r}} E^\zeta \neq \{0\}$ (en général si $A$ est une $\mathbb{C}$-algèbre, $B$ un $A$-module et $\chi : A \to \mathbb{C}$ un homomorphisme, on note $\mathbb{C} \otimes_{A,\chi} B$ le quotientde $B$ par le sous-espace engendré par les éléments $\chi(a)b - ab$, pour $a \in A$ et $b \in B$).

Des modules $E^+$ et $E^-$ se déduit un $G$-module $\tilde{E}$ (cf. [23], 1.11) et $\pi$ est la représentation de $G$ dans $D^G(\tilde{E})$ où $D^G$ est l'involution de Zelevinsky–Aubert–Schneider–Stuhler [2,19]. Des propriétés de cette involution et du lemme [23], 3.4, résulte l'équivalence des deux conditions suivantes, où l'on reprend les hypothèses et notations du paragraphe 1 :

(1) $\pi_Q$ contient un sous-quotient irréductible de la forme $\eta^\zeta|\,|^{(a-1)/2} \otimes \cdots \otimes \eta^\zeta|\,|^{(a_-+1)/2} \otimes \pi'$ ;
(2) $2N^\zeta \geqslant a - a_-$ et $\mathrm{Exp}(E^\zeta)$ contient un élément $(s, r_0)$ où $s = (s_1, \ldots, s_{N^\zeta}) \in \mathbb{C}^{N^\zeta}$ est tel que $s_i = (a + 1 - 2i)r_0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, (a - a_-)/2\}$.

*7.3.* On se place sous les hypothèses du paragraphe 7.1. Il s'agit de prouver que la condition (2) ci-dessus est équivalente à l'égalité $\varepsilon^\zeta(a) = \varepsilon^\zeta(a_-)$. Pour alléger les notations, on supprime les exposants $\zeta$, ce signe étant désormais fixé. Rappelons brièvement la définition du module $E$. On a introduit en [23], 2.1 :

- un sous-groupe parabolique $\widehat{P} = \widehat{M}\widehat{U}$ de $\widehat{G}$ tel que $\widehat{M} = (\mathbb{C}^*)^N \times \widehat{G}_c$, où $\widehat{G}_c = Sp(k(k+1), \mathbb{C})$ ;
- une orbite nilpotente $\mathcal{C}$ dans $\hat{\mathfrak{g}}_c$ (en général si $\widehat{H}$ est un groupe complexe on note $\hat{\mathfrak{h}}$ son algèbre de Lie) ;
- un système local $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{C}$ qui est $\widehat{G}_c$-équivariant.

Posons $\mathcal{P}_y := \{g\widehat{P};\ g \in \widehat{G}, Ad(g^{-1})y \in \mathcal{C} + \hat{\mathfrak{u}}\}$. Du système local ci-dessus se déduit un système local encore noté $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{P}_y$. Posons $\widehat{G}_{\mathbb{C}} = \widehat{G}_c \times \mathbb{C}^*$ et notons $\widehat{D}$ le plus petit sous-tore de $\widehat{G}_{\mathbb{C}}$ dont l'algèbre de Lie contienne $(\sigma, r_0)$. Ce groupe agit sur $\mathcal{P}_y$ par $(h, \lambda)g\widehat{P} = hg\widehat{P}$, on note $\mathcal{P}_y^{\widehat{D}}$ le sous-ensemble des invariants. L'espace $\hat{\mathfrak{d}}$ est la droite

$\mathbb{C}(\sigma, r_0)$. Notons $X$ le polynôme sur cette droite qui vaut $zr_0$ au point $(z\sigma, zr_0)$. L'algèbre de cohomologie équivariante $H_{\widehat{D}}$ est isomorphe à l'algèbre des polynômes sur $\hat{\mathfrak{d}}$, i.e., à $\mathbb{C}[X]$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, notons $\chi_z : H_{\widehat{D}} \to \mathbb{C}$ l'homomorphisme tel que $\chi_z(X) = zr_0$.

Introduisons l'espace d'homologie équivariante $H^{\widehat{D}}(\mathcal{P}_y^{\widehat{D}}, \mathcal{L})$. Il est muni de deux actions qui commutent :

- une action de $\overline{A}(\sigma, y)$ : le groupe $Z_{\widehat{G}}(\sigma, y)$ agit naturellement sur $\mathcal{P}_y^{\widehat{D}}$, donc sur $H^{\widehat{D}}(\mathcal{P}_y^{\widehat{D}}, \mathcal{L})$ et l'action de $Z_{\widehat{G}}(\sigma, y)^0$ sur cet espace d'homologie est triviale ;
- une action de $H_{\widehat{D}}$.

Notons $H^{\widehat{D}}(\mathcal{P}_y^{\widehat{D}}, \mathcal{L})^\varepsilon$ le sous-espace de $H^{\widehat{D}}(\mathcal{P}_y^{\widehat{D}}, \mathcal{L})$ dans lequel $\overline{A}(\sigma, y)$ agit par son caractère $\varepsilon$. D'après [23], 2.14, [10] proposition 7.5, et [11], proposition 4.4, on a l'égalité $E = \mathbb{C} \otimes_{H_{\widehat{D}}, \chi_1} H^{\widehat{D}}(\mathcal{P}_y^{\widehat{D}}, \mathcal{L})^\varepsilon$ ($\chi_1$ est $\chi_z$ pour $z = 1$). L'algèbre $\mathcal{S}$ agit sur $H^{\widehat{D}}(\mathcal{P}_y^{\widehat{D}}, \mathcal{L})$ par une action qui commute aux précédentes et que nous décrirons plus loin. Elle a la propriété suivantes. Notons $X_1, \ldots, X_N, X_0$ les formes linéaires « coordonnées » sur $\mathbb{C}^N \oplus \mathbb{C}$. On a $\mathcal{S} \simeq \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_N, X_0]$. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Le $\overline{\mathcal{H}}$-module $E_z = \mathbb{C} \otimes_{H_{\widehat{D}}, \chi_z} H^{\widehat{D}}(\mathcal{P}_y^{\widehat{D}}, \mathcal{L})^\varepsilon$ n'est autre que $\mathbb{P}(z\sigma, zr_0, y, \varepsilon)$ avec les notations de [23]. On sait que $X_0$ agit sur ce module par multiplication par $zr_0$. De plus $H^{\widehat{D}}(\mathcal{P}_y^{\widehat{D}}, \mathcal{L})^\varepsilon$ est un $H_{\widehat{D}}$-module projectif de type fini (cf. [10], proposition 7.2 ; l'hypothèse $H_c^{\mathrm{odd}}(\mathcal{P}_y^{\widehat{D}}, \mathcal{L}) = \{0\}$ est vérifiée d'après [10], proposition 8.6 et [11], proposition 4.4). De ces propriétés résulte que les actions de $X_0$ et $X$ sur $\widehat{V}^\varepsilon$ coïncident. Alors, pour tout $s \in \mathbb{C}^N$, on a les égalités :

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathcal{S}, \ell_{s,r_0}} H^{\widehat{D}}\big(\mathcal{P}_y^{\widehat{D}}, \mathcal{L}\big)^\varepsilon = \mathbb{C} \otimes_{\mathcal{S}, \ell_{s,r_0}} \big(\mathbb{C} \otimes_{H_{\widehat{D}}, \chi_1} H^{\widehat{D}}\big(\mathcal{P}_y^{\widehat{D}}, \mathcal{L}\big)^\varepsilon\big) = \mathbb{C} \otimes_{\mathcal{S}, \ell_{s,r_0}} E. \tag{1}$$

Décrivons maintenant l'action de $\mathcal{S}$. Fixons un homomorphisme $\phi_c : SL(2, \mathbb{C}) \to \widehat{G}_c$ dont la dérivée envoie les éléments nilpotents réguliers de $sl(2, \mathbb{C})$ dans $\mathcal{C}$. Posons :

$$\widehat{Z}(\phi_c) = \Bigg\{ (h, \lambda) \in \widehat{M}_{\mathbb{C}};\ \forall x \in SL(2, \mathbb{C}),\ (h, \lambda)\phi_c(x)\big(h^{-1}, \lambda^{-1}\big) = \phi_c\left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) \Bigg\},$$

où bien sûr $\widehat{M}_{\mathbb{C}} = \widehat{M} \times \mathbb{C}^*$. Notons $\widehat{A}_c$ sa composante neutre et $\overline{A}_c = \widehat{Z}(\phi_c)/\widehat{A}_c$. Notons $\widehat{T}$ le plus grand tore central de $\widehat{M}$. Alors $\widehat{T}_{\mathbb{C}} = \widehat{A}_c$ par $(t, \lambda) \mapsto t\phi_c\left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{smallmatrix}\right)$. On en déduit l'identification des algèbres de Lie $\mathbb{C}^N \oplus \mathbb{C} \simeq \hat{\mathfrak{t}}_{\mathbb{C}} \simeq \hat{\mathfrak{a}}_c$. L'algèbre de cohomologie $H_{\widehat{D}_c}$ est isomorphe à l'algèbre des polynômes sur $\hat{\mathfrak{a}}_c$ donc à $\mathcal{S}$. Posons :

$$\mathcal{V} = \big\{ (g, \lambda)\widehat{D} \in \widehat{G}_{\mathbb{C}}/\widehat{D};\ \lambda^{-2} Ad(g) y \in y_c + \hat{\mathfrak{u}},\ Ad(g)\sigma \in \hat{\mathfrak{p}} \big\}.$$

Cette variété est munie d'un système local que l'on note encore $\mathcal{L}$. Le groupe $\widehat{A}_c$ agit naturellement sur $\mathcal{V}$ et on définit l'espace d'homologie équivariante $H^{\widehat{A}_c}(\mathcal{V}, \mathcal{L})$. Le groupe

$\overline{A}_c$ y agit naturellement, on note $H^{\widehat{A}_c}(\mathcal{V},\mathcal{L})^{\overline{A}_c}$ le sous-espace des invariants. Comme en [23], 2.5, on montre que l'on a l'égalité :

$$H^{\widehat{D}}\big(\mathcal{P}_y^{\widehat{D}},\mathcal{L}\big)=H^{\widehat{A}_c}(\mathcal{V},\mathcal{L})^{\overline{A}_c}.$$

Maintenant l'algèbre $H_{\widehat{A}_c}$ agit naturellement sur l'espace de droite. Via l'identification $H_{\widehat{A}_c}\simeq\mathcal{S}$, c'est l'action cherchée de $\mathcal{S}$. Le groupe $Z_{\widehat{G}}(\sigma,y)$ agit encore sur $\mathcal{V}$. On en déduit une action de $\overline{A}(\sigma,y)$ sur $H^{\widehat{A}_c}(\mathcal{V},\mathcal{L})^{\overline{A}_c}$. Pour tout $s\in\mathbb{C}^N$, l'égalité (1) devient :

$$(2)\quad \mathbb{C}\otimes_{H_{\widehat{A}_c},\ell_{s,r_0}}H^{\widehat{A}_c}(\mathcal{V},\mathcal{L})^{\overline{A}_c,\varepsilon}=\mathbb{C}\otimes_{\mathcal{S},\ell_{s,r_0}}E.$$

*7.4.* Notons $\widehat{V}$ l'espace symplectique dont $\widehat{G}$ est le groupe symplectique. Pour tout $i\in\mathbb{Z}$, notons $\widehat{V}_i$ le sous-espace propre pour $\sigma$ associé à la valeur propre $ir_0$. Pour tout $i\in\{1,\dots,(a-a_-)/2\}$, l'espace $\widehat{V}_{a+1-2i}\cap\operatorname{Ker}(y^i)$ est de dimension 1. Fixons-en un générateur $v_i$. Complétons la famille $(v_i)_{i+1,\dots,(a-a_-)/2}$ en une base symplectique $(v_i)_{i=1,\dots,2n}$ formée de vecteurs propres pour $\sigma$. C'est possible.

**Remarque.** L'entier $n$ est ici le $n^\zeta$ du paragraphe 7.2. Base symplectique signifie que $\langle v_i,v_j\rangle=0$ si $i+j\neq 2n+1$, $\langle v_i,v_{2n+1-i}\rangle=1$ pour $i=1,\dots,n$. Notons :

- $\widehat{V}'$ le sous-espace de $\widehat{V}$ engendré par les $v_i$ pour $(a-a_-)/2+1\leqslant i\leqslant 2n-(a-a_-)/2$ ;
- $\widehat{G}'$ son groupe symplectique ;
- $\widehat{L}$ le sous-groupe des éléments de $\widehat{G}$ qui conservent $\widehat{V}'$ ainsi que les droites $v_i$ pour $1\leqslant i\leqslant(a-a_-)/2$ et $2n-(a-a_-)/2+1\leqslant i\leqslant 2n$ ;
- $\widehat{Q}$ le sous-groupe parabolique de $\widehat{G}$ stabilisant le drapeau : $\mathbb{C}v_1\subset\mathbb{C}v_1\oplus\mathbb{C}v_2\subset\cdots\subset\mathbb{C}v_1\oplus\cdots\oplus\mathbb{C}v_{(a-a_-)/2}$;
- $\widehat{N}$ son radical unipotent.

On a $\widehat{Q}=\widehat{L}\widehat{N}$, $\widehat{L}\simeq(\mathbb{C}^*)^{(a-a_-)/2}\times\widehat{G}'$, $\sigma\in\hat{\mathfrak{l}}$, $y\in\hat{\mathfrak{q}}$. Notons $\sigma'$ et $y'$ les projections naturelles de $\sigma$ et $y$ dans $\hat{\mathfrak{g}}'$. On a toujours $[\sigma',y']=2r_0y'$ et $y'$ est un élément nilpotent de $\hat{\mathfrak{g}}'$ ayant les mêmes blocs de Jordan que $y$ à l'exception de $a$ qu'il n'a pas et $a_-$ qui intervient avec multiplicité 2. Le groupe $Z_{\widehat{G}}(\sigma,y)$ est inclus dans $\widehat{Q}$. On en déduit un homomorphisme $\overline{A}(\sigma,y)\to\overline{A}(\sigma',y')$. Il est surjectif et les caractères $\varepsilon_0$ de $\overline{A}(\sigma,y)$ qui se factorisent par cette projection sont exactement ceux pour lesquels $\varepsilon_0(a)=\varepsilon_0(a_-)$ (avec notre convention $\varepsilon_0(a_-)=1$ si $a_-=0$).

*7.5.* Supposons $2N\geqslant a-a_-$. Quitte à conjuguer $\sigma$ et $y$, on peut supposer, et l'on suppose, $\widehat{P}\subset\widehat{Q}$ et $\widehat{M}\subset\widehat{L}$. Soit $s=(s_1,\dots,s_N)\in\mathbb{C}^N$ tel que $s_i\in\mathbb{Z}r_0$ pour tout $i$ et $s_i=(a+1-2i)r_0$ pour tout $i\in\{1,\dots,(a-a_-)/2\}$. Étudions l'espace $\mathbb{C}\otimes_{H_{\widehat{A}_c},\ell_{s,r_0}}H^{\widehat{A}_c}(\mathcal{V},\mathcal{L})^{\overline{A}_c}$. Notons $\widehat{D}_c$ le plus petit sous-tore de $\widehat{A}_c$ dont l'algèbre de Lie contienne

$(s, r_0)$ et $\mathcal{V}^{\widehat{D}_c}$ le sous-ensemble des invariants dans $\mathcal{V}$ pour l'action de $\widehat{D}_c$. Grâce à [11], proposition 4.4, de l'injection $\mathcal{V}^{\widehat{D}_c} \hookrightarrow \mathcal{V}$ se déduit un isomorphisme :

$$(1) \quad \mathbb{C} \otimes_{H_{\widehat{A}_c}, \ell_{s,r_0}} H^{\widehat{A}_c}\big(\mathcal{V}^{\widehat{D}_c}, \mathcal{L}\big)^{\overline{A}_c} \simeq \mathbb{C} \otimes_{H_{\widehat{A}_c}, \ell_{s,r_0}} H^{\widehat{A}_c}(\mathcal{V}, \mathcal{L})^{\overline{A}_c}.$$

Étudions l'ensemble $\mathcal{V}^{\widehat{D}_c}$. Soit $(g, \lambda)\widehat{D} \in \mathcal{V}$. On a :

$$(g, \lambda)\widehat{D} \in \mathcal{V}^{\widehat{D}_c} \quad \Leftrightarrow \quad (g, \lambda)\widehat{D}\big(g^{-1}, \lambda^{-1}\big) = \widehat{D}_c \quad \Leftrightarrow \quad \forall (\sigma_1, r_1) \in \hat{\mathfrak{d}}, \big(Ad(g)\sigma_1, r_1\big) \in \hat{\mathfrak{d}}_c.$$

Puisque $\hat{\mathfrak{d}}$ et $\hat{\mathfrak{d}}_c$ sont des droites engendrées respectivement par $(\sigma, r_0)$ et $(s, r_0)$, la dernière condition ci-dessus est équivalente à $Ad(g)\sigma = s$. Supposons la vérifiée, posons $y_0 = Ad(g)y$ et, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, notons $\widehat{V}_{i,0}$ le sous-espace de $\widehat{V}$, propre pour $s$ associé à la valeur propre $ir_0$. Soit $i \in \{1, \ldots, (a - a_-)/2\}$. Puisque $Ad(g)$ envoie le couple $(\sigma, y)$ sur $(s, y_0)$, on a l'égalité :

$$g\big(\widehat{V}_{a+1-2i} \cap \operatorname{Ker}\big(y^i\big)\big) = \widehat{V}_{a+1-2i,0} \cap \operatorname{Ker}\big(y_0^i\big).$$

Ces deux espaces sont des droites. Celui de gauche est la droite $\mathbb{C}gv_i$. Parce que $s_i = (a + 1 - 2i)r_0$, on a $v_i \in \widehat{V}'_{a+1-2i}$. Parce que $y_0 \in \hat{\mathfrak{p}}$, on a $v_i \in \operatorname{Ker}(y_0^i)$. L'espace de droite ci-dessus est donc la droite $\mathbb{C}v_i$. On obtient que $g$ stabilise cette droite. Donc $g \in \widehat{Q}$. On obtient alors la description de $\mathcal{V}^{\widehat{D}_c}$ suivante. Posons :

$$\mathcal{V}_{\widehat{L}}^{\widehat{D}_c} = \big\{(h, \lambda)\widehat{D} \in \widehat{L}_{\mathbb{C}}/\widehat{D};\ \lambda^{-2}Ad(h)y' \in y_c + \hat{\mathfrak{u}} \cap \hat{\mathfrak{l}},\ Ad(g)\sigma = s\big\},$$

notons $\widehat{N}(\sigma)$ le commutant de $\sigma$ dans $\widehat{N}$. Alors l'application :

$$\begin{aligned} \widehat{N}(\sigma) \times \mathcal{V}_{\widehat{L}}^{\widehat{D}_c} &\to \mathcal{V}^{\widehat{D}_c} \\ \big(n, (h, \lambda)\big) &\mapsto (nh, \lambda) \end{aligned}$$

est un isomorphisme. D'après [10], 1.4(e), on a l'isomorphisme

$$H^{\widehat{A}_c}\big(\mathcal{V}^{\widehat{D}_c}, \mathcal{L}\big)^{\overline{A}_c} \simeq H^{\widehat{A}_c}\big(\mathcal{V}_{\widehat{L}}^{\widehat{D}_c}, \mathcal{L}\big)^{\overline{A}_c}.$$

Introduisons les objets $\mathcal{V}'$, $\widehat{D}'$, $\widehat{A}'_c$ etc, analogues de $\mathcal{V}$, $\widehat{D}$, $\widehat{A}_c$ etc pour le groupe $\widehat{G}'$ relatifs aux termes $\sigma'$, $y'$ et $s'$, où $s' = (s_{(a-a_-)/2+1}, \ldots, s_N) \in \mathbb{C}^{N'}$. Notons $\widehat{T}_L$ le plus grand tore central dans $\widehat{L}$, que l'on identifie naturellement à $(\mathbb{C}^*)^{(a-a_-)/2}$. Pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$, posons :

$$t(\lambda) = \big(\lambda^{a-1}, \lambda^{a-3}, \ldots, \lambda^{a_-+1}\big) \in \widehat{T}_L.$$

On dispose d'une injection :

$$\begin{aligned} j:\quad \widehat{A}'_c &\to \widehat{A}_c \\ (a', \lambda') &\mapsto \big(t(\lambda')a', \lambda'\big). \end{aligned}$$

Notons $\widehat{A}_c \times_{\widehat{A}'_c} \mathcal{V}'^{\widehat{D}'_c}$ le quotient de $\widehat{A}_c \times \mathcal{V}'^{\widehat{D}_c}$ par la relation d'équivalence $((a,\lambda) j(a',\lambda'), (h,\mu)\widehat{D}') \sim ((a,\lambda), (a'h, \lambda'\mu)\widehat{D}')$ pour $(a,\lambda) \in \widehat{A}_c$, $(a',\lambda') \in \widehat{A}'_c$, $(h,\mu)\widehat{D}' \in \mathcal{V}'^{\widehat{D}'_c}$. Alors l'application :

$$\begin{aligned} \widehat{A}_c \times_{\widehat{A}'_c} \mathcal{V}'^{\widehat{D}'_c} &\to \mathcal{V}_{\widehat{L}}^{\widehat{D}_c} \\ \big((a,\lambda), (h,\mu)\widehat{D}'\big) &\mapsto \big(at(\mu)h, \lambda\mu\big)\widehat{D} \end{aligned}$$

est un isomorphisme. On en déduit l'isomorphisme

$$H^{\widehat{A}_c}\Big(\mathcal{V}_{\widehat{L}}^{\widehat{D}_c}, \mathcal{L}\Big) = H^{\widehat{A}'_c}\big(\mathcal{V}'^{\widehat{D}'_c}, \mathcal{L}\big).$$

On a $\overline{A}_c = \overline{A}'_c$ et l'isomorphisme ci-dessus entrelace les actions de ce groupe. De l'injection $j$ se déduit un homomorphisme $H_{\widehat{A}_c} \to H_{\widehat{A}'_c}$. Quand on interprète $H_{\widehat{A}_c}$, respectivement $H_{\widehat{A}'_c}$, comme l'espace des polynômes sur $\hat{\mathfrak{a}}_c$, respectivement $\hat{\mathfrak{a}}'_c$, cet homomorphisme n'est autre que l'application de restriction à $\hat{\mathfrak{a}}'_c$, cet espace étant plongé dans $\hat{\mathfrak{a}}_c$ par l'application dérivée $dj$. On obtient alors l'égalité :

$$\mathbb{C} \otimes_{H_{\widehat{A}_c, \ell_{s,r_0}}} H^{\widehat{A}_c}\Big(\mathcal{V}_{\widehat{L}}^{\widehat{D}_c}, \mathcal{L}\Big)^{\overline{A}_c} = \mathbb{C} \otimes_{H_{\widehat{A}'_c, \ell'_{s',r_0}}} H^{\widehat{A}'_c}\big(\mathcal{V}'^{\widehat{D}'_c}, \mathcal{L}\big)^{\overline{A}'_c}.$$

On a enfin un isomorphisme analogue à (1) :

$$\mathbb{C} \otimes_{H_{\widehat{A}'_c, \ell'_{s',r_0}}} H^{\widehat{A}'_c}\big(\mathcal{V}'^{\widehat{D}'_c}, \mathcal{L}\big)^{\overline{A}'_c} \simeq \mathbb{C} \otimes_{H_{\widehat{A}'_c, \ell'_{s',r_0}}} H^{\widehat{A}'_c}(\mathcal{V}', \mathcal{L})^{\overline{A}'_c}.$$

En résumé, on a prouvé l'égalité :

$$\mathbb{C} \otimes_{H_{\widehat{A}_c, \ell_{s,r_0}}} H^{\widehat{A}_c}(\mathcal{V}, \mathcal{L})^{\overline{A}_c} \simeq \mathbb{C} \otimes_{H_{\widehat{A}'_c, \ell'_{s',r_0}}} H^{\widehat{A}'_c}(\mathcal{V}', \mathcal{L})^{\overline{A}'_c}.$$

Il est facile de suivre l'action de $\overline{A}(\sigma, y)$ le long de nos isomorphismes. On obtient que l'isomorphisme ci-dessus entrelace les actions de $A(\sigma, y)$, l'action de ce groupe sur le terme de gauche étant l'action naturelle et celle sur le terme de droite étant la composée de la projection $\overline{A}(\sigma, y) \to \overline{A}(\sigma', y')$ et de l'action naturelle de ce dernier groupe.

*7.6.* Supposons vérifiée la condition (2) du paragraphe 7.2; soit $(s, r_0)$ comme dans cette condition. Puisque $(s, r_0) \in \mathrm{Exp}(E)$, on a $\mathbb{C} \otimes_{\mathcal{S}, \ell_{s,r_0}} E \neq \{0\}$. Grâce à 7.3 (2), on a donc $\mathbb{C} \otimes_{H_{\widehat{A}_c, \ell_{s,r_0}}} H^{\widehat{A}_c}(\mathcal{V}, \mathcal{L})^{\overline{A}_c, \varepsilon} \neq \{0\}$. Les hypothèses de 7.5 sont vérifiées et grâce à 7.5(2) et à la description de l'action de $\overline{A}(\sigma, y)$ qui suit cette relation, cela entraîne que $\varepsilon$ se factorise par la projection de $\overline{A}(\sigma, y)$ sur $\overline{A}(\sigma', y')$. Comme on l'a dit au paragraphe 7.4, il s'ensuit que $\varepsilon(a) = \varepsilon(a_-)$.

Inversement, supposons $\varepsilon(a) = \varepsilon(a_-)$. Soit $\varepsilon'$ l'unique caractère de $\overline{A}(\sigma', y')$ tel que $\varepsilon$ soit le composé de $\varepsilon'$ et de la projection de $\overline{A}(\sigma, y)$ sur $\overline{A}(\sigma', y')$. L'entier $k$ est associé par la correspondance de Springer généralisée au couple $(y, \varepsilon)$. De même, on associe à $(y', \varepsilon')$ un entier $k'$. Ces entiers se calculent (cf., par exemple, [26], XI.3). On voit que $k = k'$. Mais par définition $k'(k'+1) \leqslant \dim_{\mathbb{C}} \widehat{V}'$, donc $k(k+1) \leqslant \dim_{\mathbb{C}} \widehat{V} - (a - a_-)$, i.e., $2N \geqslant a - a_-$. Soit $E' = \mathbb{P}(\sigma', r_0, y', \varepsilon')$, fixons un exposant $(s', r_0)$ de $E'$, avec $s' = (s'_1, \ldots, s'_{N'})$, posons :

$$s = \big((a-1)r_0, (a-3)r_0, \ldots, (a_- + 1)r_0, s'_1, \ldots, s'_{N'}\big).$$

En appliquant le même raisonnement que ci-dessus à $E'$, on voit que $\mathbb{C} \otimes_{H_{\widehat{A}'_c, \ell_{s'}, r_0}} H^{\widehat{A}'_c}(\mathcal{V}', \mathcal{L})^{\overline{A}'_c, \varepsilon'} \neq \{0\}$. Grâce à 7.5(2), on a donc $\mathbb{C} \otimes_{H_{\widehat{A}_c, \ell_s, r_0}} H^{\widehat{A}_c}(\mathcal{V}, \mathcal{L})^{\overline{A}_c, \varepsilon} \neq \{0\}$. Grâce à 7.3(2), on a donc $(s, r_0) \in \mathrm{Exp}(E)$. Cela achève la démonstration.

## Références


[1] J. Adams, $L$-functoriality for dual pairs, dans Orbite unipotentes et représentations II, Groupes $p$-adiques et réels, Astérisque 171–172 (1989) 85–129.

[2] A.-M. Aubert, Dualité dans le groupe de Grothendieck de la catégorie des représentations lisses de longueur finie d'un groupe réductif $p$-adique, Trans. Amer. Math. Soc. 347 (1995) 2179–2189.

[3] J.-F. Dat, Finiteness properties for Hecke algebras of $p$-adic groups, Prépublication, Mai 2001.

[4] M. Harris, R. Taylor, The Geometry and Cohomology of Some Simple Shimura Varieties, in: Ann. of Math. Stud., Vol. 151, Princeton Univ. Press, 2001.

[5] G. Henniart, Une preuve simple des conjectures de Langlands pour $GL_n$ sur un corps $p$-adique, Invent. Math. 139 (2000) 439–455.

[6] G. Henniart, communication à l'auteur.

[7] N. Kawanaka, Shintani lifting and Gelfand–Graev representations, in: Proc. Sympos. Pure Math., Vol. 47, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987, pp. 147–163.

[8] S. Kudla, On the local $\theta$-correspondance, Invent. Math. 83 (1986) 229–255.

[9] G. Lusztig, Classification of unipotent representations of simple $p$-adic groups, Internat. Math. Res. Notices 11 (1995) 517–589.

[10] G. Lusztig, Cuspidal local systems and graded algebras I, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. 67 (1988) 145–202.

[11] G. Lusztig, Cuspidal local systems and graded algebras II, in: Canad. Math. Soc. Conf. Proc., Vol. 16, 1995.

[12] C. Mœglin, Front d'onde des groupes classiques $p$-adiques, Amer. J. Math. 118 (1996) 1313–1346.

[13] C. Mœglin, Correspondance de Howe et front d'onde, in: Adv. Math., Vol. 133, 1998, pp. 224–285.

[14] C. Mœglin, Représentations quadratiques unipotentes des groupes classiques $p$-adiques, Duke Math. 84 (1996) 267–332.

[15] C. Mœglin, Sur la classification des séries discrètes des groupes classiques $p$-adiques : paramètres de Langlands et exhaustivité, J. Eur. Math. Soc. 4 (2002) 143–200.

[16] C. Mœglin, Représentation unipotentes et formes automorphes de carré intégrable, Forum Math. 6 (1994) 651–744.

[17] C. Mœglin, M. Tadic, Construction of discrete series for classical $p$-adic groups, J. Amer. Math. Soc. 15 (2002) 715–786.

[18] C. Mœglin, J.-L. Waldspurger, Modèles de Whittaker dégénérés pour des groupes $p$-adiques, Math. Z. 196 (1987) 427–452.

[19] M. Schneider, U. Stuhler, Representation theory and sheaves on the Bruhat–Tits building, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. 85 (1997) 97–191.

[20] F. Shahidi, A proof of Langlands conjecture on Plancherel measures: complementary series for $p$-adic groups, Ann. of Math. 132 (1990) 273–330.

[21] F. Shahidi, On certain $L$-functions, Amer. J. Math. 103 (1981) 297–356.

[22] A. Silberger, Special representations of reductive $p$-adic groups are not integrable, Ann. of Math. 111 (1980) 571–587.
[23] J.-L. Waldspurger, Représentations de réduction unipotente pour $SO(2n+1)$: quelques conséquences d'un article de Lusztig, Prépublication, Juillet 2001.
[24] J.-L. Waldspurger, Représentation métaplectique et conjectures de Howe, in: Exposé au séminaire Bourbaki, 1986–1987.
[25] J.-L. Waldspurger, La formule de Plancherel d'après Harish-Chandra, à paraître au Journal de l'Institut de Mathématiques de Jussieu.
[26] J.-L. Waldspurger, Intégrales orbitales nilpotentes et endoscopie pour les groupes classiques non ramifiés, Astérisque 269 (2001).